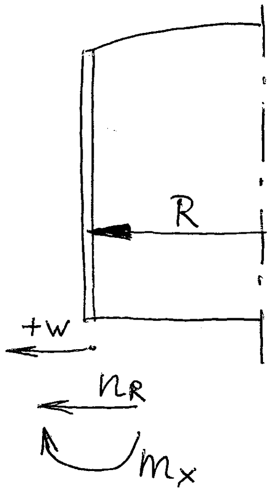
Mittragende Breite bei Zylinderschalen

(Formular mittragende_Breite_Herleitung_10-02-01.mcd)

Die mittragende Breite wurde ursprünglich z.B. im Zusammenhang mit ringversteiften Rohrleitungen hergleitet (z.B. Diss. Mang 1965)

Es gelten die üblichen Abkürzungen für die Plattensteifigkeit



$$K = \frac{E \cdot T^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}$$

und die charakteristische Länge

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}}{\sqrt{R \cdot T}}$$

In einer einseitig halbunendlich langen Zylinderschale mit Symmetriebedingungen am betrachteten Rand benötigt man für eine Verschiebung der Schalenwand nach aussen um den Betrag w,0 die radiale Streckenlast (z.B. Behälterskript Knödel - Z-Vertraeg)

$$n_R = w_0 \cdot 4 \cdot K \cdot \lambda^3$$

aus dieser entsteht in der Schale eine Umfangsnormalkraft (Kesselformel)

$$N_\varphi = n_R \cdot R = w_0 \cdot 4 \cdot K \cdot \lambda^3 \cdot R$$

Aus der Verformung des Meridians entsteht in der Schale ein Krempelmoment (gezogene Faser liegt innen)

$$m_x = -w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^2$$

Aus den Größen n,R und m,x entsteht ein Maximalwert der Umfangskraft n,φ

$$n_\varphi = \frac{E \cdot T}{K} \cdot \left(\frac{n_R}{2 \cdot R \cdot \lambda^3} + \frac{m_x}{2 \cdot R \cdot \lambda^2}\right) = \frac{E \cdot T}{K \cdot 2 \cdot R \cdot \lambda^2} \cdot \left(\frac{n_R}{\lambda} + m_x\right)$$

$$n_\varphi = \frac{E \cdot T}{K \cdot 2 \cdot R \cdot \lambda^2} \cdot \left(w_0 \cdot 4 \cdot K \cdot \lambda^2 - w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^2\right) = \frac{E \cdot T}{K \cdot 2 \cdot R \cdot \lambda^2} \cdot \left(w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^2\right) = \frac{w_0 \cdot E \cdot T}{R}$$

Definitionsgemäß ergibt sich die mittragende Breite aus

$$N_\varphi = n_\varphi \cdot b_m$$

Daher ist

$$b_m = \frac{N_\varphi}{n_\varphi} = \frac{w_0 \cdot 4 \cdot K \cdot \lambda^3 \cdot R}{\frac{w_0 \cdot E \cdot T}{R}} = \frac{4 \cdot K \cdot \lambda^3 \cdot R^2}{E \cdot T}$$

Nach Einsetzen der oben eingeführten Abkürzungen erhält man

$$b_m = \frac{4 \cdot E \cdot T^3 \cdot \lambda^3 \cdot R^2}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right) \cdot E \cdot T} = \frac{T^2 \cdot \lambda^3 \cdot R^2}{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}$$

$$b_m = \frac{R^2 \cdot T^2}{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)^3}}{\sqrt{R^3 \cdot T^3}} = \frac{R^2 \cdot T^2}{\sqrt{R^3 \cdot T^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)^3}}{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}$$

$$b_m = \frac{R \cdot T}{\sqrt{R \cdot T}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3^3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)^3}{3^4 \cdot \left(1 - \mu^2\right)^4}} = \sqrt{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}} = 0.77796 \cdot \sqrt{R \cdot T} = 0.778 \cdot \sqrt{R \cdot T}$$

Wird die Forderung nach Symmetrie - d.h. einer waagerechten Tangente - aufgegeben, erhält man einen frei verformbaren Rand. Dann vereinfachen sich die Ausdrücke zu

$$n_R = w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^3$$

d.h. die benötigte radiale Streckenlast ist nur noch halb so groß,
das Krempelmoment entfällt. Die Umfangskraft beträgt

$$N_\varphi = n_R \cdot R = w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^3 \cdot R$$

Der Maximalwert der Umfangskraft n,φ wird zu

$$n_\varphi = \frac{E \cdot T}{K} \cdot \frac{n_R}{2 \cdot R \cdot \lambda^3} = \frac{E \cdot T}{K \cdot 2 \cdot R \cdot \lambda^3} \cdot w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^3 = \frac{E \cdot T}{R} \cdot w_0$$

Damit wird

$$b_m = \frac{N_\varphi}{n_\varphi} = \frac{w_0 \cdot 2 \cdot K \cdot \lambda^3 \cdot R}{\frac{w_0 \cdot E \cdot T}{R}}$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt, dass dieser Wert genau halb so groß ist, wie der zuvor ermittelte Wert.