



Lineare Baudynamik – Grundlagen

0. Inhalt

<u>0.</u>	<u>Inhalt</u>	<u>1</u>
<u>1.</u>	<u>Allgemeines</u>	<u>2</u>
<u>2.</u>	<u>Grundlagen</u>	<u>2</u>
<u>3.</u>	<u>Einleitung und Begriffe</u>	<u>3</u>
<u>4.</u>	<u>Schwingungsfähige Systeme</u>	<u>4</u>
<u>5.</u>	<u>Eigenfrequenz</u>	<u>4</u>
5.1	Feder-Masse-System	4
5.2	Einfeldträger	5
5.3	Kragarm	5
5.4	Pendel	5
5.4.1	Mathematisches Pendel	5
5.4.2	Physikalisches Pendel	6
5.5	Schwappende Flüssigkeit	7
5.6	Kippschwingung	8
5.7	Näherungsverfahren	9
5.7.1	Rayleigh-Quotient	9
5.7.2	Rayleigh-Morleigh	9
<u>6.</u>	<u>Dämpfung</u>	<u>10</u>
6.1	Mechanismus	10
6.2	Logarithmisches Dekrement	10
6.3	Lehrsches Dämpfungsmaß	12
6.4	Zahlenwerte	12
<u>7.</u>	<u>DGL</u>	<u>13</u>
<u>8.</u>	<u>Periodisch angeregte Schwingungen</u>	<u>13</u>
8.1	Krafterregung	13
8.2	Fußpunkterregung	15
8.2.1	Allgemeines	15
8.2.2	Beschreibung der Relativbewegung	15
8.2.3	Beschreibung der Absolutbewegung	17
8.3	Unwuchterregung	18
<u>9.</u>	<u>Strömungserregte Schwingungen</u>	<u>21</u>
<u>10.</u>	<u>Begleitende Regelungen</u>	<u>22</u>
<u>11.</u>	<u>Beispiele</u>	<u>22</u>
11.1	Schienenweg	22

11.2	Fundament für NC-Fräse	23
11.2.1	Aufgabenstellung	23
11.2.2	Grundlagen	23
11.2.3	Forderungen	25
11.2.4	Ergebnisse	25
<u>12.</u>	<u>Ausblick</u>	<u>25</u>
<u>13.</u>	<u>Quellen</u>	<u>25</u>

1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Einführung in die Baudynamik;

Einordnung

Stahlbau – Grundaufgaben – Dynamik – Grundlagen

Lernziele

Elastische Bauteile als schwingungsfähige Systeme verstehen lernen;
Eigenfrequenzen für einfache Systeme ermitteln können;

Einschränkungen, Abgrenzung

Nichtlineare Systeme werden nicht betrachtet;

Hinweis:

Teile dieses Skriptes (im Folgenden nicht besonders gekennzeichnet) wurden von Herrn Stefan Wönhöfer im Rahmen seiner Diplomarbeit im WS08/09 erarbeitet.

2. Grundlagen

Technische Mechanik

Ermittlung des Massenschwerpunktes;
Ermittlung der Biegesteifigkeit;

Baustatik Ermittlung des Verlaufes der Durchbiegungen entlang der Stabachse

3. Einleitung und Begriffe

Dynamik ist ein Teilgebiet der Technischen Mechanik und damit als Teilgebiet der Physik eine Naturwissenschaft. Im Gegensatz zur Statik beschäftigt sich die Dynamik mit den Bewegungen, die Körper ausführen, wenn Kräfte einwirken, siehe z.B. Newtons Grundgleichung der Dynamik $F = M \cdot a$ (Kraft ist Masse mal Beschleunigung).

Die Baudynamik beschäftigt sich hauptsächlich mit (meist unerwünschten) Schwingungen (z.B. Fußgänger auf Brücken (Wonhöfer 2009), Erdbeben) und Anprallvorgängen (z.B. Gabelstapler auf Hallenstütze), aber auch mit Explosion (z.B. Benzindampf vor einer Tunneltüre), vgl. Knödel 2007.

Amplitude	Auslenkung aus der Ruhelage; maximaler Ausschlag einer harmonischen Schwingung
Dämpfung, d	Aus der Annahme einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung (siehe DGL) lässt sich erklären, dass die physikalische Größe „Dämpfung“ die Einheit Kraft / Geschwindigkeit hat, d.h. $[N \cdot s/m]$
Dämpfungsparameter, ζ (zeta) oder D	„Lehrsches Dämpfungsmaß“ oder „Prozentsatz der kritischen Dämpfung“ oder „Dämpfungskoeffizient“ siehe auch „logarithmisches Dekrement“
Einheiten	In der Dynamik empfiehlt es sich, IMMER in den Grundeinheiten des mks-Systemes zu rechnen, d.h.: Meter, Kilogramm, Sekunden, Newton; $1 [N] = 1 [kg \cdot m/s^2]$
Erregerfrequenz, Ω	Kreisfrequenz der Anregung (siehe auch Kreisfrequenz)
Frequenz, f	Schwingungszahl einer periodischen Schwingung je Zeiteinheit, z.B. in Schwingungen pro Sekunde, 1/s oder Hz;
Harmonische Schwingung	Weg-Zeit-Funktion mit der Periodendauer $T = 2\pi / \omega$: $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin[(2\pi / T) \cdot t]$ Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v = y' = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

	Beschleunigung-Zeit-Funktion (a = acceleration) $a = y'' = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Hertz, Hz	Heinrich Hertz (1857 – 1894), „erfand“ als 24-jähriger die „Hertzsche Pressung“ und entdeckte an der Universität Karlsruhe als 29-jähriger die elektromagnetischen Schwingungen; Einheit der Schwingungszahl;
Kreisfrequenz, ω (omega)	Frequenz im Bogenmaß, daher gilt $\omega = f \cdot 2 \pi = 2 \pi / T$ Die Einheit ist rad/s oder 1/s
kritische Dämpfung, d, cr	$d, cr = 2 M \omega$ [kg/s] = [N s/m] Für $d \rightarrow d, cr$, d.h. $D \rightarrow 1$, verschiebt sich der erste Nulldurchgang der Schwingung gegen ∞ , aus der Schwingung wird eine Kriechbewegung
logarithmisches Dekrement, δ (delta)	beschreibt die relative Abnahme zweier aufeinander folgender Amplituden; $\delta = 2\pi \cdot D$
Periode, T	Schwingungsdauer einer vollständigen periodischen Schwingung, Kehrwert der Frequenz

4. Schwingungsfähige Systeme

Jedes elastisch verformbare Bauteil oder Bauwerk ist schwingungsfähig.

Bauteile, die verhältnismäßig steif sind, haben hohe Eigenfrequenzen und kleine Amplituden, so dass die Schwingungen oft nicht wahrgenommen werden.

5. Eigenfrequenz

5.1 Feder-Masse-System

Eine Masse M [kg] hängt an einer Spiralfeder mit der Federsteifigkeit c [N/m]; ein horizontal reibungsfrei verfahrbarer Wagen mit der Masse M [kg] ist über eine Horizontalfeder mit der Federsteifigkeit c [N/m] mit einem starren Auflager verbunden:

$$f = 1 / 2\pi * \sqrt{c / M}$$

5.2 Einfeldträger

Einfeldträger mit kontinuierlicher Massenbelegung m [kg/m] und kontinuierlicher Biegesteifigkeit $E \cdot I$ [N*m²]

$$f = \pi / 2 * \sqrt{[E \cdot I / (m * L^4)]}$$

5.3 Kragarm

Gewichtsloser Kragarm mit kontinuierlicher Biegesteifigkeit $E \cdot I$ [N*m²] und einer Punktmasse M [kg] am Ende:

$$f = \pi / 2 * \sqrt{[3 \cdot E \cdot I / (M * L^3)]}$$

Kragarm mit kontinuierlicher Massenbelegung m [kg/m] und kontinuierlicher Biegesteifigkeit $E \cdot I$ [N*m²]

$$f = 0,560 * \sqrt{[E \cdot I / (m * L^4)]}$$

5.4 Pendel

5.4.1 Mathematisches Pendel

Gewichtsloses Pendel der Länge L [m] mit einer Punktmasse M [kg] am Ende – im Schwerfeld der Erde mit der Gravitationskonstanten $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Unter der Voraussetzung, dass die Amplituden so klein sind, dass für man für den Auslenkungswinkel $\sin \varphi = \varphi$ setzen kann, gilt:

$$f = 1 / 2\pi * \sqrt{g / L} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi * \sqrt{L / g}$$

Alle Pendel der gleichen Länge schwingen gleich schnell, unabhängig von der Größe der Masse.

Beispiel 1:

Pendel einer Kuckucksuhr, effektive Länge ca. 120 mm

$$f = 1 / 2\pi * \sqrt{(9,81 \text{ m/s}^2 / 0,120 \text{ m})} = 1,44 \text{ Hz}$$

Beispiel 2:

Foucaultsches Pendel zum Beweis der Erddrehung (Paris 1851)

67 m langes Drahtseil mit einer 28 kg schweren Kugel

$$f = 1 / 2\pi * \sqrt{(9,81 \text{ m/s}^2 / 67 \text{ m})} = 0,061 \text{ Hz}; \quad T = 16,4 \text{ s}$$

Werden die Auslenkungen so groß, dass die oben genannte Näherung nicht mehr gilt, wird die Periode T bei größeren Amplituden länger. Der Korrekturfaktor beträgt (Petersen 1996, Abs. 4.7.1, Gl. 217)

$$k(\varphi) = 1 + (1/2)^2 * \sin^2(\varphi/2) + (1/2 * 3/4)^2 * \sin^4(\varphi/2) \\ + (1/2 * 3/4 * 5/6)^2 * \sin^6(\varphi/2) + (1/2 * 3/4 * 5/6 * 7/8)^2 * \sin^8(\varphi/2) + \dots$$

Der Einfluss ist jedoch relativ gering, bei einer Auslenkung von 45° beträgt die Verlängerung der Periode

$$k(45^\circ) = 1 + 1/4 * 0,383^2 + 9/16 * 0,383^4 + 225/2304 * 0,383^6 + \dots$$

$$k(45^\circ) = 1 + 0,0366 + 0,0121 + 0,000307 = 1,0490$$

5.4.2 Physikalisches Pendel

Im Gegensatz zum mathematischen Pendel hat beim physikalischen Pendel das Pendel selbst ein Gewicht und die Masse eine endliche Ausdehnung. Beide bilden daher einen Körper mit endlichen Abmessungen, dessen Masseschwerpunkt beim Pendeln nicht nur eine translatorische Bewegung ausführt, sondern auch noch gegenüber der gleichzeitig stattfindenden Rotation eine Massenträgheit entwickelt, die aufgrund der Energiebilanz das Pendel langsamer macht.

Für genügend kleine Amplituden, die $\sin \varphi = \varphi$ erfüllen, beträgt die Schwingdauer (Petersen 1996 Abs. 4.7.3, Gl. 231 ff):

$$T = 2\pi * \sqrt{(J_0 / M * g * L)}$$

mit J_0 als Massenträgheitsmoment bezogen auf den Drehpunkt.

Das Massenträgheitsmoment lässt sich aufspalten in ein Eigenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes und ein Steiner-Glied und durch Verwendung des Trägheitsradius i weiter vereinfachen.

$$T = 2\pi * \sqrt{[(J_S + M * L^2) / (M * g * L)]} = 2\pi * \sqrt{[(i^2 + L^2) / (g * L)]}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit dem mathematischen Pendel lässt sich eine „reduzierte Pendellänge“

$$L_{\text{red}} = (i^2 + L^2) / L = J_0 / M * L$$

definieren, so dass sich die Periode des physikalischen Pendels wie die des mathematischen mit der Beziehung

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L_{\text{red}} / g}$$

schreiben lässt.

Beschreibt man den Unterschied zwischen L_{red} und dem Schwerpunktsabstand L in der Form

$$L_{\text{red}} = k^2 \cdot L$$

mit

$$k^2 = L_{\text{red}} / L$$

dann erhält man

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{(k^2 \cdot L / g)} = k \cdot 2\pi \cdot \sqrt{(L / g)} \quad \text{oder} \quad T_{\text{phys}} = k \cdot T_{\text{math}}$$

Beispiel:

Ein Balken der Länge $2L$ und mit dem quadratischen Querschnitt a/a ist an einem Ende gelenkig aufgehängt.

$$J_0 = M/12 \cdot (4L^2 + a^2)$$

$$i = \sqrt{(J_0/M)} = \sqrt{[(4L^2 + a^2)/12]}$$

$$L_{\text{red}} = [(4L^2 + a^2)/12 + L^2] / L$$

$$k^2 = [(4L^2 + a^2)/12 + L^2] / L^2 = (4 + a^2/L^2)/12 + 1$$

Unter Verwendung von

$$\alpha = a / 2L \quad (\alpha = 0: \text{„Stricknadel“}; \quad \alpha = 1: \text{„Würfel“})$$

erhält man hieraus

$$k^2 = (4 + 4\alpha^2 + 12)/12 = (\alpha^2 + 4)/3$$

5.5 Schwappende Flüssigkeit

Schwappende Flüssigkeit in mehreren kleinen Kammern wird z.B. als Dämpfer für Horizontalschwingungen bei Stahlschornsteinen verwendet.

Kreistopf mit der Füllhöhe h :

$$f = 1 / 2\pi \cdot \sqrt{[3,68 \cdot g/D \cdot \tanh(3,68 \cdot h/D)]}$$

(Gerasch 1998)

Rechteckkanal mit der Schwapplänge L und der Füllhöhe h :

$$f = \sqrt{[g/(4\pi L) * \tanh(\pi h/L)]}$$

(Verwiebe 1998)

Beispiel 1:

Zylindrische Kaffeetasse mit lichtigem Durchmesser 80 mm und Füllhöhe 80 mm

$$f = 1 / 2\pi * \sqrt{[3,68 * g / 0,080 \text{ m} * \tanh(3,68 * 80 \text{ mm} / 80 \text{ mm})]}$$

$$f = 1 / 2\pi * \sqrt{[451 * 1/s^2 * 1]} = 3,4 \text{ Hz}$$

Beispiel 2:

Quadratische Kammer in einem Schwingungsdämpfer mit Kantenlänge 150 mm und Füllhöhe 50 mm

$$f = \sqrt{[g / (4 * \pi * 0,150 \text{ m}) * \tanh(\pi * 0,050 \text{ m} / 0,150 \text{ m})]}$$

$$f = \sqrt{[5,20 * 1/s^2 * \tanh(1,05)]} = \sqrt{[5,20 * 1/s^2 * 0,78]} = 2,0 \text{ Hz}$$

5.6 Kippschwingung

Quaderförmiges Fundament $L/B/H$ auf elastischer Unterlage.

Das Fundament kippt in Richtung der Abmessung L .

Massenträgheitsmoment bezogen auf den Fundamentalschwerpunkt

M = Fundamentmasse

$$J_{,0} = (L^2 + H^2) * M/12$$

Massenträgheitsmoment bezogen auf die Sohlfläche

$$J = J_{,0} + M * (H/2)^2$$

Federsteifigkeiten nach Petersen Abs. 17.6.4.2:

E : dynamischer E-Modul des Bodens (siehe Grundbau-Taschenbuch)

A, I : Querschnittswerte der Sohlfläche

f : Beiwert aus Petersen Bild 38 b ... für ein quadratisches Fundament: 0,45

Bettungsziffer für Hubschwingung:

$$C_{,z} = E / (f * \sqrt{A})$$

Bettungsziffer für Kippschwingung:

$$C_{,\varphi} = 2 * C_{,z}$$

Drehfedersteifigkeit für die Kippschwingung:

$$c_{\varphi} = I \cdot C_{\varphi}$$

Eigenkreisfrequenz der Kippschwingung:

$$\omega_{\varphi} = \sqrt{c_{\varphi} / J}$$

5.7 Näherungsverfahren

5.7.1 Rayleigh-Quotient

$$f = 1 / 2\pi \cdot \sqrt{[g \cdot \Sigma(G \cdot y) / \Sigma(G \cdot y^2)]}$$

Die Struktur wird dabei in Abschnitte geteilt, G ist die Gewichtskraft eines Abschnittes, y ist die Ordinate einer näherungsweise angenommenen Schwingungs-Biegelinie. Stimmt die angenommene Biegelinie mit der tatsächlichen überein, ist das Ergebnis exakt.

Bei einem einzelnen Massepunkt reduziert sich der Rayleigh-Quotient auf

$$f = 1 / 2\pi \cdot \sqrt{(g / y_{,max})}$$

Aufgrund der Einfachheit wird diese Formel daher oft für grobe Abschätzungen genommen.

5.7.2 Rayleigh-Morleigh

Nach Morleigh verwendet man als genäherte Biegelinie für den Rayleigh-Quotienten die Biegelinie aus Eigenlasten.

$$f = 1 / 2\pi \cdot \sqrt{(g / y_{,max})}$$

mit

$y_{,max}$ = größte Durchbiegung einer Struktur unter den mitschwingenden Massen

Mit diesem Verfahren können auch Eigenfrequenzen von Schwingungen in horizontaler Richtung ermittelt werden, z.B. für die Erdbebenbeanspruchung eines Bauwerkes:

Man ermittelt die maximale Horizontalauslenkung $y_{,max}$ unter den horizontal wirkenden Eigengewichten der mitschwingenden Massen und wendet dann den Rayleigh-Quotienten an.

6. Dämpfung

6.1 Mechanismus

Mechanische Schwinger haben die Eigenschaft, dass ihre Amplituden während des Schwingens abnehmen. Dabei wird mechanische Energie, die als potentielle Energie Bewegungsenergie im Schwinger gespeichert ist, in Wärme umgewandelt („dissipiert“ = zerstreut).

Die Dissipation findet z.T. innerhalb des Werkstoffgefüges statt (mikroskopische Dissipation, Material- bzw. Werkstoffdämpfung):

- geschwindigkeitsabhängige kristalline Deformation im elastischen oder plastischen Bereich;
- geschwindigkeitsunabhängige innere Reibung in der Fließfläche durch plastische Verformungen;

Die Dissipation kann auch auf der Bauteilebene stattfinden (makroskopische Dissipation, Struktur- oder Systemdämpfung):

- Reibungsdämpfung (trockene Reibung):
Dämpfung durch relative Bewegung zueinander. Geschwindigkeitsunabhängige Dämpfung, z.B. Gleiten der Bauteile in einem Schraubanschluss, Gleiten von Rissufern unter scherender Beanspruchung;
- viskose Dämpfung aus Fluidreibung, aerodynamische Dämpfung:
Geschwindigkeitsabhängige Dämpfung, z.B. Öl in einem KFZ-„Stoßdämpfer“ oder Luft, die um einen schwingenden Fahnenmast strömt;

Die Dissipation kann auch außerhalb der Bauteilebene stattfinden, z.B. in den Lagern oder im Baugrund (makroskopische Dämpfung).

6.2 Logarithmisches Dekrement

Die anschauliche Beschreibung ergibt sich aus der relativen Abnahme der Schwingungsamplituden während einer Periode.

Aus der mathematischen Darstellung (z.B. Petersen 1996 Abs. 5.3.1)

$$y(t) = e^{-D \cdot \omega \cdot t} \cdot A \cdot \cos(\omega, D \cdot t)$$

mit

$$\omega, D = \omega \cdot \sqrt{(1 - D^2)}$$

und

$$D = \delta / 2\pi$$

folgt, dass der Term e^{-x} eine obere und eine untere Grenzkurve beschreibt („Trompetenkurven“) zwischen denen die harmonische Schwingung verläuft. Die Abnahme der Amplituden folgt daher einem Potenzgesetz, bei dem sich jede Amplitude gegenüber der vorherigen um ein feststehendes Verhältnis verringert.

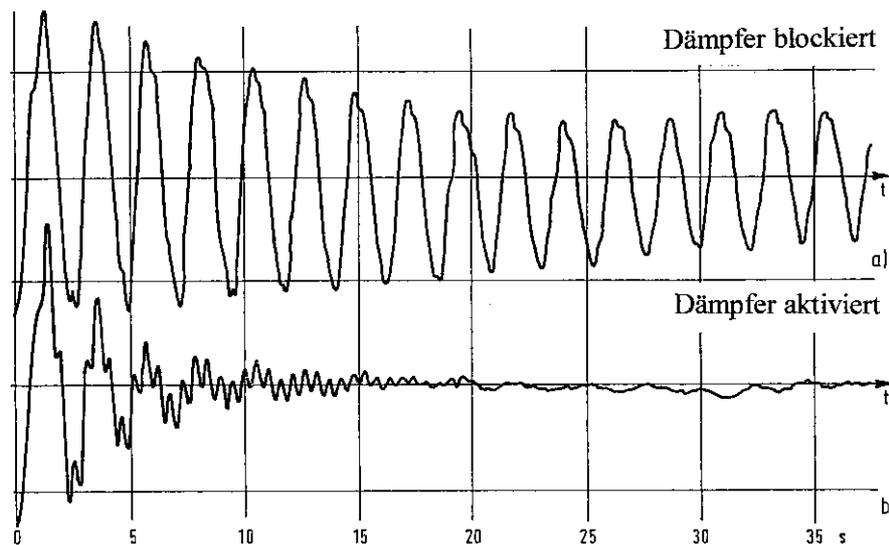


Bild 70

Ausschwingversuch an einem 84 m hohen Stahlschornstein (Petersen 2001)

$$\delta = \ln [\text{Amp}(N) / \text{Amp}(N+1)]$$

(Mensinger 1993)

Da dies messtechnisch schwierig zu bewältigen ist, zählt man in der Praxis eine größere Anzahl ANZ aus, und ermittelt dann

$$\delta = 1/\text{ANZ} \cdot \ln [\text{Amp}(N) / \text{Amp}(N+\text{ANZ})]$$

6.3 Lehrsches Dämpfungsmaß

Der Zusammenhang zwischen dem logarithmischen Dekrement und dem Lehrschen Dämpfungsmaß D lautet

$$D = \delta / 2\pi$$

In der angelsächsischen Literatur wird hierfür häufig auch der Formelbuchstabe ζ (zeta) verwendet.

Die sogenannte kritische Dämpfung ist $D = 1$.

Für Dämpfungswerte $D > 1$ tritt keine periodische Schwingung mehr auf, sondern nur noch eine Kriechbewegung, die nach Auslenkung aus der Ruhelage wieder asymptotisch gegen die Ruhelage strebt.

6.4 Zahlenwerte

Die Werkstoff-Dämpfung ist im Stahlbau sehr klein. In DIN 4133 Tabelle A.4 wird als kleinster Wert für Stahlschornsteine $\delta = 0,015$ angegeben.

Tabelle A.4. Dämpfungsdekremente δ

Konstruktionsart		δ
Rohr,	ungestoßen, geschweißt oder mit GV-Verbindung geschraubt, ohne Innenrohr, ohne Isolierung	0,015
Rohr,	geschraubt oder genietet, ohne Innenrohr, ohne Isolierung	0,02
Rohr,	mit einem isolierten Innenrohr oder Außenisolierung	0,025
Rohr,	mit zwei oder mehreren isolierten Innenrohren	0,03
Rohr,	ausgemauert	0,07
Zweier-Rohr,	kraftschlüssig verbunden, ohne Isolierung	0,025
Dreier-Rohr-Gruppe,	kraftschlüssig verbunden, ohne Isolierung	0,03
Rohr,	abgespannt, ohne Innenrohr, ohne Isolierung	0,04

Auszug aus DIN 4133

Für die oben dargestellte Ausschwingkurve mit blockiertem Dämpfer erhält man eine Abnahme vom ersten Peak mit 22 mm (gezeichnete Amplitude) auf 8,5 mm nach 9 Perioden, wenn man die positiven Amplituden auswertet.

$$\delta = 1/9 * \ln [22 \text{ mm} / 8,5 \text{ mm}] = 0,11$$

Für die Schwingbreiten vom 2. bis zum 10. Peak erhält man eine Abnahme von 38,5 mm

bis auf 21 mm, daher

$$\delta = 1/8 * \ln [38,5 \text{ mm} / 21 \text{ mm}] = 0,076$$

(Petersen gibt hierfür 0,05 bis 0,06 an)

In seltenen Fällen ist die Dämpfung deutlich niedriger, als vermutet.

siehe z.B. Verwiebe/Burger (1998)

Von Peil/Scharff (2001) wurden an Brückenhängern logarithmische Dekremente zwischen 0,002 und 0,001 gemessen – immerhin eine Zehnerpotenz kleiner, als man das ungünstigstenfalls von Stahlbauten erwartet!

7. DGL

Als Differentialgleichung wird meistens verwendet:

$$m * x''(t) + d * x'(t) + c * x(t) = p(t)$$

Das ist eine Formulierung des momentanen Kräftegleichgewichts:

Linke Seite – 1. Term: Masse mal Beschleunigung

Linke Seite – 2. Term: Dämpfung mal Geschwindigkeit

Linke Seite – 3. Term: Federsteifigkeit mal Weg

Rechte Seite: eingeprägte Last

Aus den obigen Ausführungen über die Mechanismen der Dämpfung ist zu erkennen, dass der Ansatz einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung in den meisten Fällen falsch ist. Unabhängig davon ist es üblich, so zu formulieren.

Die Lösung der DGL erfolgt mit den üblichen ingenieurmathematischen Verfahren, eine gängige Formulierung wurde weiter oben bereits angegeben.

8. Periodisch angeregte Schwingungen

8.1 Krafterregung

Wird ein Schwinger periodisch angeregt – hier als Krafterregung, dann steht auf der rechten Seite der DGL

$$p(t) = F_{\max} * \sin(\Omega * t)$$

Die Amplituden werden SEHR groß, wenn die Erregerfrequenz Ω mit der Eigenfrequenz ω übereinstimmt („Resonanzkatastrophe“).

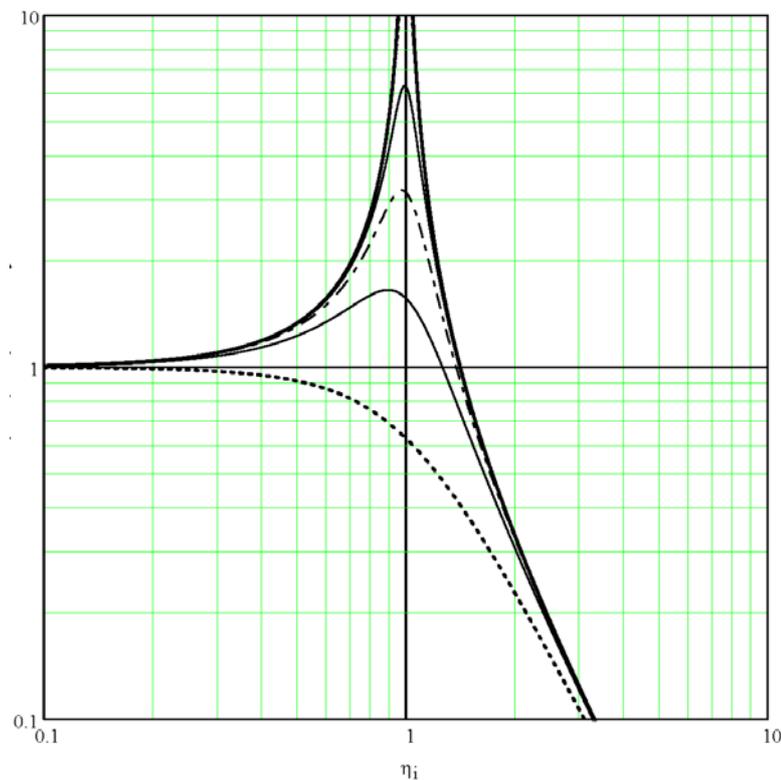
Es wird ein Vergrößerungsfaktor V definiert, der die Amplitude der dynamischen Auslenkung im eingeschwungenen (stationären) Zustand auf die statische Auslenkung unter einmaliger, quasi-statischer Lasteinwirkung der Kraft $F_{,max}$ bezieht.

$$V = x_{,dyn} / x_{,stat}$$

Da der Vergrößerungsfaktor frequenzabhängig ist, und üblicherweise auch spektral über einem bestimmten Frequenzbereich dargestellt wird, spricht man auch von der Vergrößerungsfunktion (siehe z.B. Petersen Dynamik Abs. 5.4.3.1 Gl. 67)

$$V = 1 / \text{Nenner}$$

$$\text{Nenner} = \sqrt{\{ [1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + (2 \cdot D \cdot \Omega/\omega)^2 \}}$$



Vergrößerungsfunktion bei Krafterregung
für $\delta = 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1$ (Kurven von unten nach oben)
aufgetragen über $\eta = \Omega/\omega$

Die Gleichung beschreibt einen schmalen „Resonanzpeak“, der für $\Omega/\omega = 1$ sehr hohe Werte annimmt.

- Ohne Dämpfung (nur theoretisch möglich) werden die Amplituden unendlich groß, weil der Nenner in der vorstehenden Gleichung Null wird.
- Mit Dämpfung ergeben sich die maximalen Auslenkungen aus
$$V = \pi / \delta = 1 / 2D$$
Auch hier gibt es eine Korrektur in der Frequenz, so dass die exakte Lösung heißt
$$V = 1 / \text{Nenner}$$
mit
$$\text{Nenner} = 2 D * \sqrt{(1 - D^2)}$$
Das Maximum tritt auf an der Stelle
$$\eta = \sqrt{(1 - 2 * D^2)}$$
Beispiel:
Stahlschornstein, ungedämpft, $\delta = 0,015$
$$V = \pi / 0,015 = 209$$
Stahlschornstein, mit Schwingungsdämpfer, $\delta = 0,20$
$$V = \pi / 0,20 = 15,7$$
- Der gefährliche Bereich ist relativ schmal.
Beispiel:
Die Erregerfrequenz Ω ist 20 % von der Eigenfrequenz ω entfernt, $D = 0$.
a) $\Omega/\omega = 0,83$; Nenner = 0,31; $V = 3,21$
b) $\Omega/\omega = 1,20$; Nenner = -0,44; $V = 2,27$
Eine Vergrößerung von ca. 3,2 wirkt zwar auf den ersten Blick „groß“ man vergleiche jedoch mit dem Wert 209 für einen ungedämpften Schornstein oder dem Wert 15 (siehe obiges Diagramm) für einen Schornstein mit Schwingungsdämpfer.

8.2 Fußpunkterregung

8.2.1 Allgemeines

Als Fußpunkterregung bezeichnet man Bewegungs-Zeit-Verläufe, die dem Fußpunkt des Schwingers aufgeprägt werden. Beispiele hierfür sind: ein Gebäude bei Erdbeben; ein Fahrzeug, dessen Räder über unebenen Boden fahren.

8.2.2 Beschreibung der Relativbewegung

Die Erregung wird als Wegfunktion des Fußpunktes beschrieben (siehe Petersen Dynamik Abs. 5.4.2 c) Gl. 53 ff)

$$x_{,F} = x_{,F,max} * \sin(\Omega * t)$$

Die oben angegebene DGL wird damit zu

$$m \cdot x''(t) + d \cdot (x - x_{,F})'(t) + c \cdot (x - x_{,F})(t) = 0$$

Feder und Dämpfer reagieren auf die Relativbewegung zwischen dem Fuß und der Masse m , die Massenträgheit der Masse m bleibt „frei“. Bezieht man alle Weggrößen auf die Relativverschiebung

$$u = x - x_{,F}$$

dann erhält man

$$m \cdot (u + x_{,F})''(t) + d \cdot u'(t) + c \cdot u(t) = 0$$

und umgeformt

$$m \cdot u''(t) + d \cdot u'(t) + c \cdot u(t) = -m \cdot x_{,F}''$$

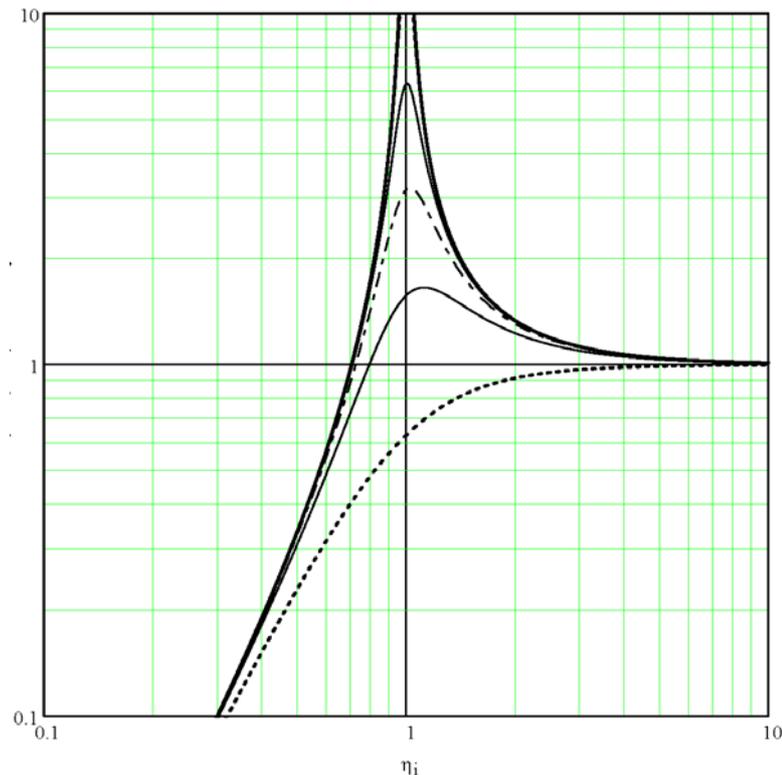
$$m \cdot u''(t) + d \cdot u'(t) + c \cdot u(t) = +m \cdot \Omega^2 \cdot x_{,F,max} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Die zugehörige Vergrößerungsfunktion wird definiert als Verhältnis der relativen Bewegung zwischen Fußpunkt und Masse und der absoluten Bewegung des Fußpunktes (siehe Petersen Dynamik Abs. 5.4.5 Gl. 151)

$$V = (x - x_{,F})_{,max} / x_{,F,max} = (\Omega/\omega)^2 / \text{Nenner}$$

Der Nenner ist identisch mit dem oben angegebenen Term bei der Krafterregung:

$$\text{Nenner} = \sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + (2 \cdot D \cdot \Omega/\omega)^2}$$



Vergrößerungsfunktion der Relativverschiebungen bei Fußpunkterregung
für $\delta = 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1$ (Kurven von unten nach oben)
aufgetragen über $\eta = \Omega/\omega$

Deutung der Funktion:

Bei sehr langsamer Bewegung des Fußpunktes kann die Masse unmittelbar folgen, es entsteht nur eine kleine Relativbewegung;

Bei sehr schneller Bewegung des Fußpunktes kann die Masse der Erregung nicht mehr folgen, der Fußpunkt bewegt sich unter der unbewegten Masse hin und her, die Relativbewegung ist 1.

8.2.3 Beschreibung der Absolutbewegung

Die Erregung wird als Wegfunktion des Fußpunktes beschrieben (siehe Petersen Dynamik Abs. 5.4.2 c) Gl. 53 ff und 153 ff)

$$x_{,F} = x_{,F,max} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Die oben angegebene DGL wird damit zu

$$m \cdot x''(t) + d \cdot x'(t) + c \cdot x(t) = d \cdot x_{,F}'(t) + c \cdot x_{,F}(t)$$

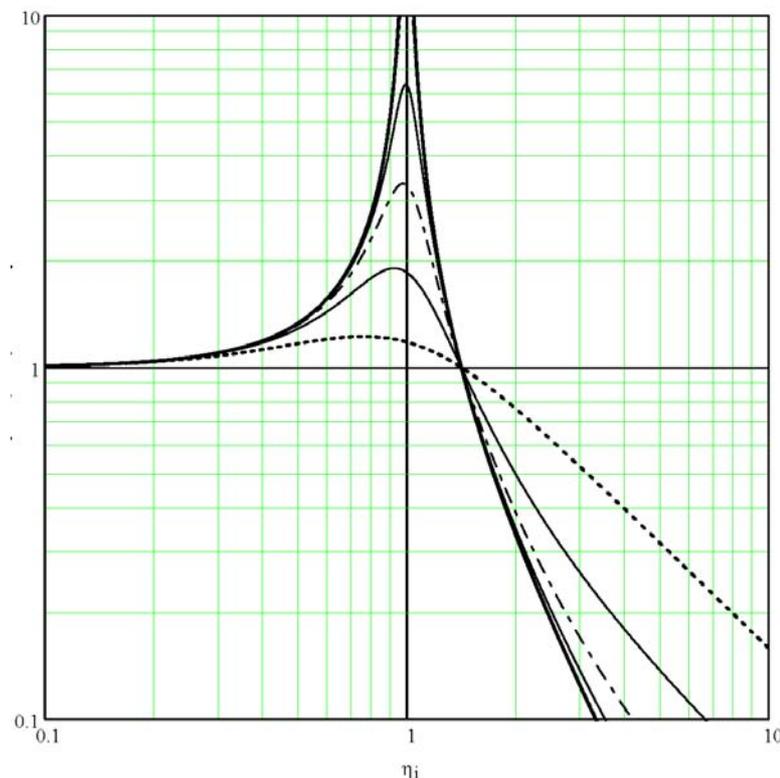
Feder und Dämpfer reagieren auf die Relativbewegung zwischen dem Fuß und der Masse m , die Massenträgheit der Masse m bleibt „frei“.

Die zugehörige Vergrößerungsfunktion wird definiert als Amplitudenverhältnis von Masse und Fußpunkt (siehe Petersen Dynamik Abs. 5.4.5 Gl. 156)

$$V = x_{,max} / x_{,F,max} = \sqrt{[1 + (2 \cdot D \cdot \Omega / \omega)^2] / \text{Nenner}}$$

Der Nenner ist identisch mit dem oben angegebenen Term bei der Krafterregung:

$$\text{Nenner} = \sqrt{[1 - (\Omega / \omega)^2]^2 + (2 \cdot D \cdot \Omega / \omega)^2}$$



Vergrößerungsfunktion der Absolutverschiebungen bei Fußpunkterregung
für $\delta = 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1$ (Kurven im Resonanzbereich von unten nach oben)
aufgetragen über $\eta = \Omega / \omega$

8.3 Unwuchterregung

Auf einem Fundament sitzt eine Maschine mit einer exzentrisch umlaufenden Masse m, U , die Exzentrizität beträgt r, U .

Die auf das Fundament wirkende Kraft beträgt (siehe Petersen Dynamik Abs. 5.4.2 b) Gl. 49 ff)

$$F_U(t) = m_U \cdot r_U \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Die oben angegebene DGL wird damit zu

$$m \cdot x''(t) + d \cdot x'(t) + c \cdot x(t) = m_U \cdot r_U \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Als Vergrößerungsfunktion wird das Verhältnis von Schwingamplitude x_{\max} und Unwuchtexzentrizität r_U angegeben, wobei diese Weggrößen jeweils mit ihren Massen gewichtet werden:

$$V = m \cdot x_{\max} / (m_U \cdot r_U) = (\Omega/\omega)^2 / \text{Nenner}$$

Die Vergrößerungsfunktion entspricht damit der Beschreibung der Relativbewegungen bei Fußpunkterregung, siehe hierzu das oben angegebene Diagramm.

Deutung:

„hart aufgestellt“ bzw. „hoch abgestimmt“

günstig ist ein Frequenzverhältnis deutlich kleiner als der Resonanzbereich, d.h. $\Omega \ll \omega$, das erreicht man durch eine hohe Eigenfrequenz des schwingenden Fundaments. Wegen $\omega = \sqrt{c/m}$ ist dazu eine kleine Fundamentmasse oder eine hohe Lagersteifigkeit erforderlich. In der Baupraxis scheitert eine Reduzierung der Masse daran, dass aufgrund konstruktiver Gegebenheiten gewisse Mindestabmessungen des Fundaments nicht unterschritten werden können. Eine Anhebung der Steifigkeit ist aufgrund des gegebenen Baugrundes meist nicht möglich, es sei denn, man zieht einen Bodenaustausch („Kiesauskoffnung“) oder eine Pfahlgründung in Betracht. Die zweite Möglichkeit, höhere Steifigkeit zu erhalten, geht über eine größere Sohlfläche, das bedingt aber wieder die Erhöhung der Fundamentmasse.

„weich aufgestellt“ bzw. „tief abgestimmt“

ebenfalls günstig ist ein Frequenzverhältnis deutlich größer als der Resonanzbereich, d.h. $\Omega \gg \omega$. Um ω klein zu halten, wählt man bei gleicher Sohlfläche eine möglichst große Fundamentmasse. Wegen $\omega = \sqrt{c/m}$ benötigt man aber die vierfache Fundamentmasse, um die Frequenz um den Faktor 2 zu ändern. Bei dem genannten Frequenzverhältnis $\Omega \gg \omega$ liegt die Vergrößerungsfunktion bei 1, d.h. $x_{\max} = r_U \cdot m_U / m$,
d.h. mit größer werdender Fundamentmasse m verkleinern sich proportional die

Auslenkungen x_{\max} des Fundaments.

Falls man auf die beschriebene Weise nicht zu zufriedenstellenden Ergebnissen kommt, entkoppelt man das Maschinenfundament vom eigentlichen Gründungskörper. Zwischen Maschinenfundament und Gründungskörper werden Spiralfedern gestellt, so dass man über deren Federsteifigkeit eine weitere Einflussgröße hat, mit der man die Eigenfrequenz des Maschinenfundamentes herabsetzen kann. Nachteilig ist aber dann die statische Einsenkung des „weich“ gelagerten Fundaments.

Projektbeispiel:

Portalfräsmaschine 1800 kN

Maschinenfundament 18 m x 11 m x 2 m, Gewicht 7400 kN

Federpakete 2 Reihen je 6 Stück je 40 kN/mm, Vertikalsteifigkeit 480 kN/mm

Hubeigenfrequenz 3,6 Hz

Projektbeteiligte:

Bauherr: anonymisiert

Tragwerksplaner: Zachmann Ingenieure, Bühl

Entwurfsplanung Dynamik: Ingenieurbüro Dr. Knödel, Ettlingen

Bemessung und Lieferung der Federpakete: Gerb Engineering GmbH, Essen

9. Strömungserregte Schwingungen



Quelle: Seite 162 in Apt et al. (1977);

Insel Guadalupe westlich Mexiko; auf dem Bild ist Süden oben; zu sehen sind ca. 80-90 % der 37 km langen Insel; das Bild gibt demnach von oben nach unten eine Strecke von ca. 200 km wieder; der Berg Mt. Augusta am nördlichen Ende des Wolkenloches ist 1295 m hoch;

Quelle der geographischen Angaben:

www.sdnhm.org/research/guadalupe/map-guadalupe.html

Siehe auch Knödel (2005).

10. Begleitende Regelungen

- Bei Hochbaudecken ist eine Eigenfrequenz ≥ 3 Hz einzuhalten (Quelle im Moment unbekannt).
- Bei Gymnastikräumen und Tanzsälen ist eine Eigenfrequenz ≥ 5 Hz einzuhalten (Quelle im Moment unbekannt).

11. Beispiele

11.1 Schienenweg

Beim Neubau der Hochgeschwindigkeitsstrecke im unteren Inntal werden die Schienen streckenweise auf „schwimmenden“ Betontrögen verlegt. In einer Informationsbroschüre der BEG (2007) werden dazu folgende Frequenzen angegeben.

Typ	Bezeichnung	Eigenfrequenz	gefederte Masse	Lager
MFS A+	optimiertes schweres MFS	5,5 – 6,5	9,5 t/m	Einzellager
MFS A	schweres MFS	6,5 – 8,5	8,1 t/m	Einzellager
MFS B	mittleres MFS	8,5 – 11	7,4 t/m	Flächenlager
MFS C	mittleres MFS	11 – 14	6,8 t/m	Flächenlager
MFS D	leichtes MFS	14 – 20	7,0 t/m	Flächenlager
MFS E	leichtes MFS	20 – 30	7,1 t/m	Flächenlager

MFS = Masse-Feder-System

Hinweis: Flächenlager sind in diesem Fall flächig ausgelegte Matten
(vermutlich Neoprene).

11.2 Fundament für NC-Fräse

11.2.1 Aufgabenstellung

In einer bestehenden Halle soll eine NC-Fräse aufgestellt werden, der bestehende Hallenboden muss dazu aufgeschnitten werden (vgl. Projekt Knödel F0533).

Das Fundament für die NC-Fräse wird mit den Abmessungen $L/B/H = 3,50/3,50/0,80$ m gewählt.

Die Maschine wiegt nach Angaben des Herstellers ca. 120 kN einschließlich Werkstück bei Abmessungen von $L/H = 2,20/2,00$ m. Auf der Maschine wird eine Masse von 500 kg bewegt, der Schwerpunkt der bewegten Masse liegt ca. 1,10 m über OKF.

Die Linearmotoren können maximale Kräfte aufbringen von

13 kN in Längsrichtung des Spannbettes

6 kN in Querrichtung des Spannbettes

6 kN in Höhenrichtung

Der Maschinenhersteller fordert eine Verformungsbeschränkung bei Bewegungen der Maschine:

0,010 mm in Höhenrichtung sowie

0,010 mm/m als Neigungswinkel.

Aufgabe:

Überprüfen Sie, ob die Gründung der Maschine den Forderungen des Herstellers genügt. Zum Boden haben Sie keine Angaben, nehmen Sie „Lechtal“ an.

11.2.2 Grundlagen

Sohlfläche:

$$A = 3,50 \text{ m} * 3,50 \text{ m} = 12,25 \text{ m}^2$$

$$V = 12,25 \text{ m}^2 * 0,80 \text{ m} = 9,80 \text{ m}^3$$

$$I = 3,50 \text{ m} * (3,50 \text{ m})^3 / 12 = 12,5 \text{ m}^4$$

Fundamentmasse

$$M = 9,80 \text{ m}^3 * 2500 \text{ kg/m}^3 = 24.500 \text{ kg}$$

Massenträgheitsmoment des Fundamentes bezogen auf den Fundamentschwerpunkt

$$J_{,0} = [(3,50 \text{ m})^2 + (0,80 \text{ m})^2] \cdot 24.500 \text{ kg} / 12 = 26.300 \text{ kgm}^2$$

Massenträgheitsmoment bezogen auf die Sohlfläche

$$J = 26.300 \text{ kgm}^2 + 24.500 \text{ kg} \cdot (0,80 \text{ m} / 2)^2 = 30.200 \text{ kgm}^2$$

Gemeinsamer Schwerpunkt von Fundament und Maschine über der Sohlfläche:

$$M_{,ges} = 24.500 \text{ kg} + 12.000 \text{ kg} = 36.500 \text{ kg}$$

$$z = (24.500 \text{ kg} \cdot 0,40 \text{ m} + 12.000 \text{ kg} \cdot 1,10 \text{ m}) / 36.500 \text{ kg} = 0,630 \text{ m}$$

Massenträgheitsmoment der Maschine bezogen auf den Maschinenschwerpunkt

$$J_{,0} = [(2,20 \text{ m})^2 + (2,00 \text{ m})^2] \cdot 12.000 \text{ kg} / 12 = 8.840 \text{ kgm}^2$$

Massenträgheitsmoment bezogen auf die Sohlfläche

$$J = 8.840 \text{ kgm}^2 + 12.000 \text{ kg} \cdot (1,10 \text{ m} + 0,80 \text{ m})^2 = 51.200 \text{ kgm}^2$$

Gemeinsames Massenträgheitsmoment von Maschine und Fundament bezogen auf die Sohlfläche:

$$J_{,ges} = 30.200 \text{ kgm}^2 + 51.200 \text{ kgm}^2 = 82.400 \text{ kgm}^2$$

Vorsichtige Abschätzung für den dynamischer E-Modul des Bodens (Grundbau-Taschenbuch)

$$E_{,dyn} = 300 \text{ MN/m}^2$$

$f = 0,45$: Beiwert aus Petersen Bild 38 b für ein quadratisches Fundament

Bettungsziffer für Hubschwingung:

$$C_{,z} = 300.000 \text{ kN/m}^2 / (0,45 \cdot \sqrt{12,25 \text{ m}^2}) = 190.500 \text{ kN/m}^3 = 190 \text{ kN}/(\text{m}^2 \cdot \text{mm})$$

Bettungsziffer für Kippschwingung:

$$C_{,\varphi} = 2 \cdot 190.500 \text{ kN/m}^3 = 381.000 \text{ kN/m}^3$$

Drehfedersteifigkeit für die Kippschwingung:

$$c_{,\varphi} = 12,5 \text{ m}^4 \cdot 381.000 \text{ kN/m}^3 = 4.760.000 \text{ kNm}$$

Eigenkreisfrequenz der Kippschwingung (nur Fundament):

$$\omega_{,\varphi} = \sqrt{(4.760.000.000 \text{ Nm} / 30.200 \text{ kgm}^2)} = 397 / \text{s}$$

$$f_{,\varphi} = 397 / \text{s} / 2\pi = 63 \text{ Hz}$$

Eigenkreisfrequenz der Kippschwingung (Fundament und Maschine):

$$\omega, \varphi = \sqrt{(4.760.000.000 \text{ Nm} / 80.400 \text{ kgm}^2)} = 243 / \text{s}$$

$$f, \varphi = 243 / \text{s} / 2\pi = 38,7 \text{ Hz}$$

Kippmoment aus dem Linearantrieb bezüglich der Sohlfläche:

$$13 \text{ kN} * (1,10 \text{ m} + 0,80 \text{ m}) = 24,7 \text{ kNm}$$

11.2.3 Forderungen

$$\varphi, \text{grenz} = 0,010 \text{ mm/m}$$

$$\varphi, \text{grenz} = 0,010 \text{ mm} / 1000 \text{ mm} = 0,00001 \text{ rad} = 0,01 \text{ mrad} = 10 \text{ } \mu\text{rad}$$

11.2.4 Ergebnisse

Statisches Kippen des Fundamentes:

$$\varphi, \text{stat} = 24,7 \text{ kNm} / 4.760.000 \text{ kNm} = 0,0000052 \text{ rad} = 0,0052 \text{ mrad} = 5,2 \text{ } \mu\text{rad}$$

12. Ausblick

Folgende Verfeinerungen bzw. Vervollständigungen der Dynamik sind noch zu bedenken

- nichtlineares Rückstellverhalten (z.B. durch Seilabspannungen, siehe Knödel 2004)

13. Quellen

- [1] Apt, J., Helfert, M., Wilkinson, J.: Orbit. Die Erde in spektakulären Fotografien der NASA-Astronauten. Steiger-Verlag, Augsburg 1997. ISBN 3-89652-108-X
- [2] BEG Brenner Eisenbahn GmbH: Die Neue Unterinntalbahn. Eisenbahntechnik auf höchstem Niveau. Kundl-Baumkirchen. Informationsbroschüre Oktober 2007.
- [3] Gerasch: Vortrag auf dem III. VSA-Symposium, Bad Hersfeld, 22.01.98.
- [4] Knödel, P.: Störabspannungen für Stahlschornsteine. Stahlbau 73 (2004), Heft 4, S. 254-261.
- [5] Knödel, P.: Lehrunterlagen Behälterbau an der Hochschule Karlsruhe, Projekt Kármánsche Wirbel 2005, herunterladbar über http://www.peterknoedel.de/lehre/V0309_FH-KA/Skript/P_Karman_05-09-25.pdf
- [6] Knödel, P.: Lehrunterlagen Stahlbau an der Hochschule Augsburg, herunterladbar über <http://www.peterknoedel.de/lehre/lehre.htm>, seit März 2007 laufend aktualisiert.

- [7] Knödel, P.: Schweißanschlüsse bei „Außergewöhnlichen Einwirkungen“. Vortrag in der SLV Mannheim am 01.02.2007. Skript herunterladbar von www.peterknoedel.de.
- [8] Knoedel, P.: On the Dynamics of Steel Structures with X-Type Bracing. Stahlbau 80 (2011), No. 8, p. 566–571.
- [9] Kramer, H.: Angewandte Baudynamik. Ernst & Sohn, Berlin 2006.
- [10] Mensinger, M.: Untersuchungen zum Schwingungsverhalten lose gekoppelter Stahlschornsteine. Vertiefearbeit bei Prof. Mang, Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Universität Karlsruhe 1993. (Betreuer: Dipl.-Ing. P. Knödel)
- [11] Peil, U.: Baudynamik. Kapitel 7 in: Stahlbau Handbuch - Für Studium und Praxis. 3. Auflage, Band 1 Teil A, Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln 1993. S. 379-451.
- [12] Peil, U., Scharff, R.: Dämpfung bei schlanken Zuggliedern. Abschlussbericht zum DFG-Forschungsprojekt PE 437/20-1. Lehrstuhl für Stahlbau, Universität Braunschweig, Förderzeitraum 1998-2001.
- [13] Petersen, Chr.: Dynamik der Baukonstruktionen. Vieweg, Wiesbaden, 1996.
- [14] Petersen, Chr.: Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau. Herausgeber: Maurer Söhne GmbH & Co. KG, München 2001, anlässlich des 125jährigen Firmenjubiläums. ISBN 3-00-008059-7
- [15] Steinmetz, D., Knödel, P.: Bauen von Holzhäusern in Erdbebengebieten Deutschlands. Vortrag in der TAS Kaiserslautern am 05.04.2006. Skript herunterladbar von www.peterknoedel.de.
- [16] Verwiebe, C.: Grundlagen für den baupraktischen Einsatz von Schwingungsdämpfern auf Flüssigkeitsbasis. Diss. Aachen 1998.
- [17] Winkler, Aurich: Taschenbuch Technische Mechanik. Harri Deutsch, Frankfurt 1985.
- [18] Wonhöfer, Stefan: Fußgängerbrücke zwischen zwei Gebäuden in Stahlbauweise. Diplomarbeit an der Hochschule Augsburg, Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen 29.01.2009 (Betreuer: Prof. Knödel).