

Knicken von Stäben

0. Inhalt

<u>0.</u>	<u>Inhalt</u>	<u>1</u>
<u>1.</u>	<u>Allgemeines</u>	<u>1</u>
<u>2.</u>	<u>Grundlagen</u>	<u>2</u>
<u>3.</u>	<u>Bemessung eines Knickstabes</u>	<u>2</u>
3.1	Elastisches Knicken, perfekter Stab	2
3.2	Elastisches „Knicken“, geometrisch imperfekter Stab	5
3.3	Plastisches Knicken	5
3.4	Zusätzliche Biegemomente	7
3.5	Ersatzstabverfahren	8
3.6	Konstruktive Empfehlungen	9
3.7	Begleitende Regelungen	9
3.7.1	Knicknachweis nach EC3	9
3.7.2	Knicknachweis nach DIN 18800-2	9
<u>4.</u>	<u>Beispiel</u>	<u>13</u>
4.1	Knödels Federstahl	13
4.2	Stütze unter zentrischer Normalkraft	13
<u>5.</u>	<u>Ausblick</u>	<u>14</u>
<u>6.</u>	<u>Quellen</u>	<u>14</u>
<u>7.</u>	<u>Anhang A: Herleitung der Eulerlast</u>	<u>15</u>

1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Bemessung von stabartigen Bauteilen, die überwiegend normalkraftbeansprucht sind, nach Stabilitätskriterien.

Einordnung

Stahlbau – Grundaufgaben – Bemessung von Bauteilen – Stabilität

Lernziele

Normalkraftbeanspruchte Tragglieder mit zusätzlicher Biegebeanspruchung

bemessen können gegen Stabilitätsverlust ;
Günstige Querschnittsformen auswählen können;
Randbedingungen bewerten können;

Einschränkungen, Abgrenzung

Der Stabilitätsfall „Kippen“ bei überwiegender Biegebeanspruchung um die starke Achse ist hier nicht enthalten;
Der Stabilitätsfall „Biegedrillknicken“ als Kombination von Knicken und Kippen ist hier nicht enthalten;

2. Grundlagen

Baustatik

Ermittlung von Schnittgrößen
Knicklast des „Euler-Stabes“

Festigkeitslehre

Spannungen und Dehnungen in Bauteilen
Wesen und Verlauf von Eigenspannungen aus der Walzwärme

Werkstoffkunde

Spannungs-Dehnungs-Linie von Baustählen

3. Bemessung eines Knickstabes

3.1 Elastisches Knicken, perfekter Stab

„Elastisches Knicken“ heißt hier: die Knickvorgang, d.h. das Eintreten des Stabilitätsverlustes, findet in einem Zustand des Bauteiles statt, in dem alle Bauteilfasern noch im elastischen Bereich, d.h. unterhalb der Streckgrenze sind. Dies kann technisch z.B. dadurch erreicht werden, daß der Werkstoff des Stabes eine „unendlich hohe“ Fließgrenze hat.

Die „Eulersche Knicklast“ für einen beidseits gelenkig gelagerten, ideal geraden, zentrisch normalkraftbeanspruchten Stab mit der Biegesteifigkeit $E \cdot I$ und dem Abstand L der Auflager beträgt:

$$N_{ki} = E \cdot I \cdot \pi^2 / L^2$$

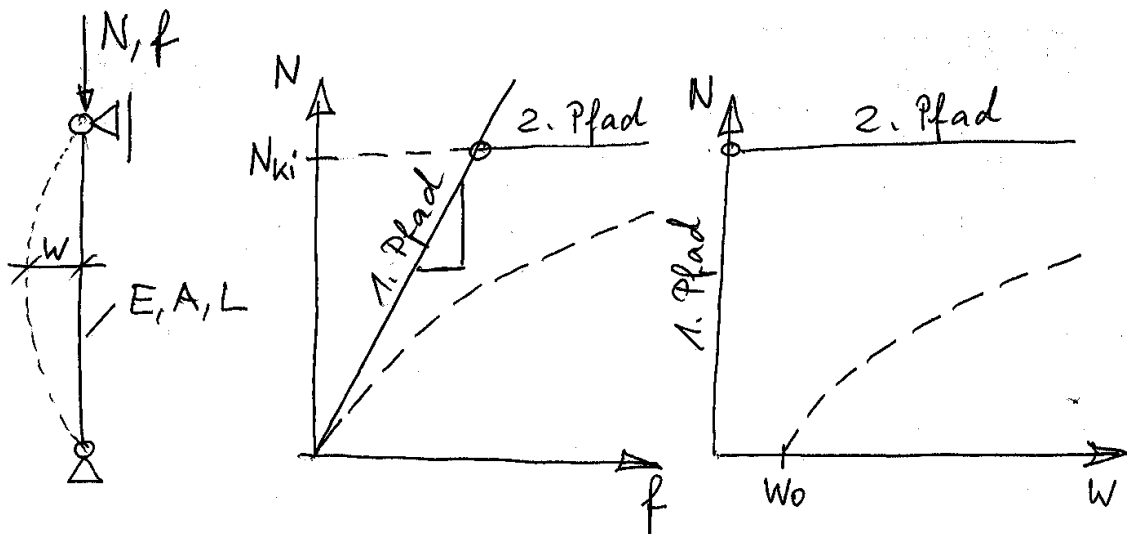
Die beiden Indizes k und i heißen „kritisch“ und „ideell“;
ideell, weil es in der Realität keine wirklich geraden Stäbe gibt.

Hierzu gibt es unterschiedliche Möglichkeiten der Herleitung, siehe z.B. Petersen (1982).
Im Anhang ist eine Herleitung aus einer Gleichgewichtsbetrachtung wiedergegeben.

Wenn der Knickvorgang rein elastisch ist (wie in der Definition vorausgesetzt), ist der
Knickvorgang reversibel, d.h. nach Wegnahme der Last kehrt der Stab wieder in seine ur-
sprüngliche, ideal gerade Lage zurück.

Ein Knickvorgang wird in der Technischen Mechanik als „Gleichgewichtsverzweigung“ be-
schrieben.

Zur Darstellung der Gleichgewichtsverzweigung beim Stabknicken sind zwei unterschiedli-
che Diagramme gebräuchlich.



Perfekter Knickstab mit Gleichgewichtsverzweigung
Imperfekter „Knickstab“ nach Theorie II. Ordnung

In der Darstellung N über f wird die Auflagerabsenkung f infolge der Dehnung (Stauchung)
 ϵ des Stabes als geneigte Linie dargestellt. Die Absenkung f entspricht der Verkürzung ΔL
des Stabes.

$$\Delta L = L \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \sigma / E$$

$$\sigma = N / A$$

alles ineinander eingesetzt ergibt:

$$\Delta L = F \cdot L / (E \cdot A)$$

Die Steigung m der Linie wird beschrieben durch

$$m = \Delta N / \Delta L$$

mit den obigen Größen erhält man nach Einsetzen und Auflösen

$$m = E \cdot A / L$$

Wenn der Stab belastet wird, „fährt“ er vom Ursprung aus den 1. Pfad entlang nach oben. Da der Stab vereinbarungsgemäß ideal gerade ist und eine unendlich hohe Streckgrenze hat, kann dies beliebig weit sein.

Bei Erreichen der Euler-Last ist für den Stab noch ein zweiter Gleichgewichtszustand möglich, bei dem der Stab in eine sinusförmige Knickfigur ausweicht. Die Verformungen w in Stabmitte und Δf am Stabende können dabei infinitesimal klein sein. Der benachbarte Gleichgewichtszustand liegt auf einem zweiten Gleichgewichtspfad, der jetzt für größer werdende f und w durchlaufen werden kann.

In der Darstellung N über w wird die Auslenkung w des Stabes beim Ausknicken dargestellt. Der 1. Pfad verläuft senkrecht nach oben, da beim idealen Druckstab keine Auslenkung stattfindet. Bei Erreichen der Euler-Last kann die Verformung „beliebig groß“ werden bei insgesamt „kleinen“ Verformungen.

Hypothesen:

- Der Stab folgt immer dem tieferen Pfad, da dort geringere innere Arbeit verrichtet werden muß.
- Der Stab enthält vor der Verzweigung nur Axialverformungen (Stauchung), nach der Verzweigung werden die Axialdehnungen entspannt und durch Biegedehnungen ersetzt.

- Bei numerischen Programmen ist das Erreichen der Euler-Last dadurch gekennzeichnet, daß ein Element der Hauptdiagonalen der Steifigkeitsmatrix Null wird. Dadurch entsteht im Gleichungslöser eine Null-Division.
„Schlechte“ Programme quittieren das durch „Absturz“ oder „overflow“, „gute“ Programme durch die Meldung „Knicklast überschritten“ o.ä.

3.2 Elastisches „Knicken“, geometrisch imperfekter Stab

Wenn der Stab von vorne herein eine geometrische Imperfektion hat, in diesem Fall angenommen als sinusförmige Vorkrümmung mit dem Stich w , dann ergibt sich die Beanspruchung des Stabes in der Mitte aus

$$\sigma = N / A + N * w / W$$

durch Integration entlang der Stablänge erhält man die Innere Arbeit und daraus die Auflagerabsenkung. Diese Formulierung nennt man „Theorie II. Ordnung“, d.h. Berücksichtigung der Verformungen und der daraus folgenden Exzentrizitäten im Gleichgewichtszustand, aber nach wie vor „kleine“ Verformungen.

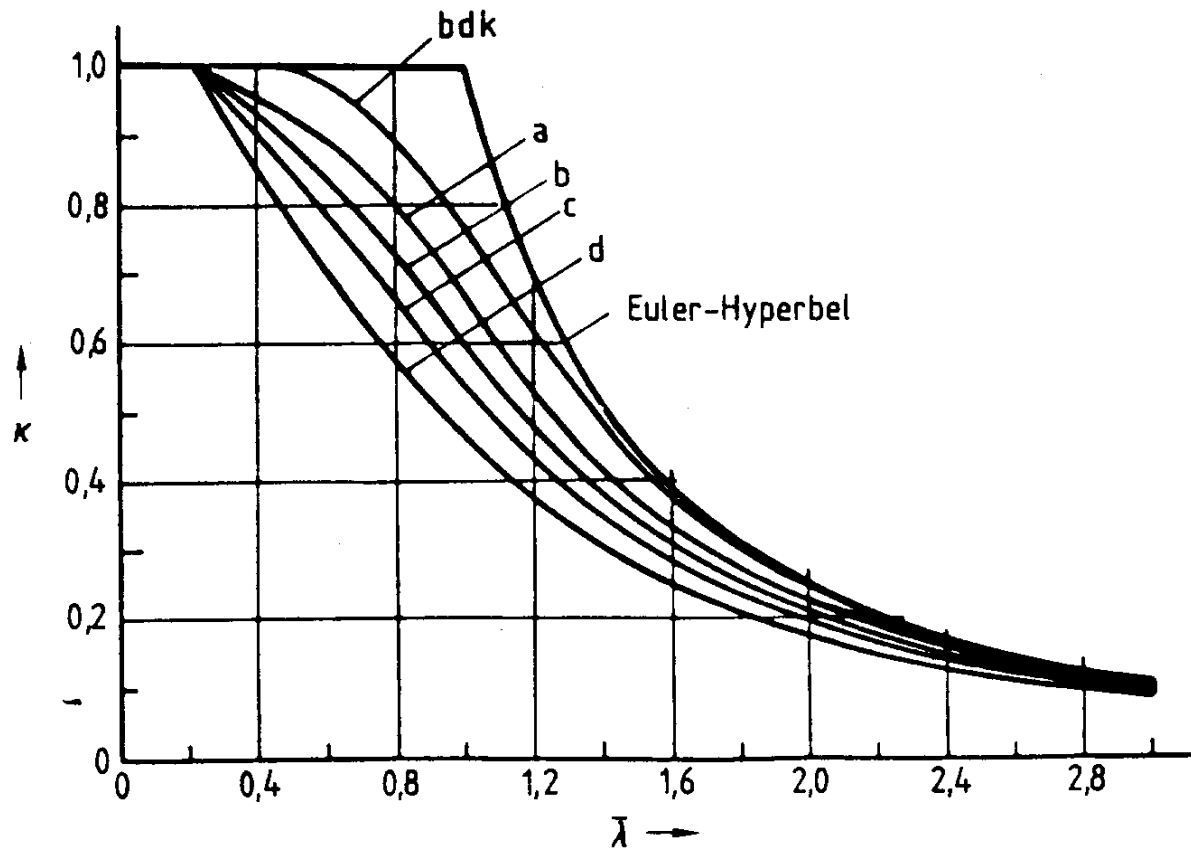
In dem oben gezeigten Diagramm N über f ist durch das zusätzliche Moment von vorne herein eine geringere Steifigkeit des Stabes erkennbar, d.h. ein flacher geneigter 1. Pfad. In diesem Fall gibt es keine Verzweigung auf einen 2. Pfad, das Niveau der Euler-Last wird asymptotisch erreicht.

Die Auslenkung w des Stabes wird beschrieben durch (Petersen 1982)

$$w = w_0 * 1 / (1 - N / N_{ki})$$

3.3 Plastisches Knicken

Wenn die Streckgrenze nicht unendlich hoch ist, d.h. wenn während des Knickvorganges plastische Dehnungen in den Fasern des Bauteiles eine Rolle spielen können, dann ist die Darstellung in einem κ - λ -Diagramm (kappa-lambda-Diagramm) üblich.



DIN 18800 Teil 2 Bild 10

Die Abkürzungen bedeuten:

$$\kappa = N / N_{pl}$$

mit der „Quetschlast“

$$N_{pl} = A \cdot f_y$$

$$\lambda = \sqrt{(N_{pl} / N_{ki})}$$

Durch gegenseitiges Einsetzen erhält man die „Euler-Hyperbel“:

$$N = N_{ki}$$

Beziehung für λ nach N_{ki} aufgelöst $N_{ki} = N_{pl} / \lambda^2$ und eingesetzt

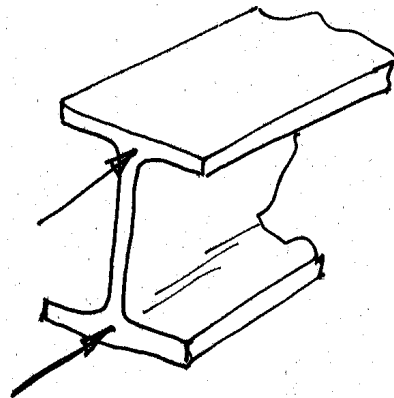
$$N = N_{pl} / \lambda^2$$

Beide Seiten durch N_{pl} dividiert

$$N / N_{pl} = 1 / \lambda^2$$

$$\kappa = 1 / \lambda^2$$

Die verschiedenen darunter liegenden Linien beziehen sich auf unterschiedliche Eigen­spannungszustände von Profilen.



Entstehung von Eigenspannungen an einem Walzprofil

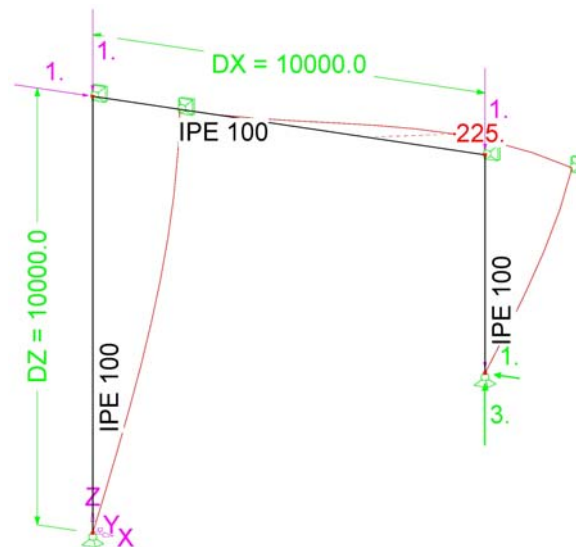
Beim Abkühlen eines Profils nach dem Walzen kühlt der Steg zuerst ab, dann folgen die etwas dickeren Flansche, und zuletzt kühlt der massigere Bereich an den Walzrundungen ab. Wenn dieser Bereich abkühlt und daher schrumpft, während die anderen Bereiche schon kalt sind, wird dort eine längs durch den Träger laufende Zug-Vorspannung erzeugt, die man sich als eingelegte, vorgespannte Gewindestange vorstellen kann (in der Skizze durch äußere Kräfte dargestellt). Die Flansche und der Steg erhalten dadurch Druckeigen­spannungen. Wird das Profil jetzt durch eine äußere Längslast auf Knicken beansprucht, versagen die Flansche früher, weil sie schon vorbelastet sind. Ein Profil mit gleicher Geometrie, aber höheren Eigenspannungen versagt daher bei kleineren Lasten.

3.4 Zusätzliche Biegemomente

Zusätzliche Biegemomente in der Ausknick-Richtung des Profils können als zusätzliche Imperfektion gedeutet werden, da sie die Ausbiegung der Stabsehne noch vergrößern. Sie machen den Stab weicher und bewirken ein vorzeitigeres Versagen.

Zusätzliche Biegemomente quer zur Ausknick-Richtung des Profils verstärken die Druckbeanspruchung im Luv-Flansch und bewirken daher ebenfalls ein früheres Versagen des Profils. Falls das zusätzliche Moment die starke Achse des Profils beansprucht, kann dieses den zusätzlichen Stabilitätsfall „Kippen“ auslösen.

3.5 Ersatzstabverfahren



Rahmen mit ungleich hohen Rahmenstielen – „Knickfigur“

Beim Ersatzstabverfahren löst man einen Stab aus dem Tragwerk, und gibt ihm Eigenschaften, die (vermutlich) denen im Tragwerk genügend genau entsprechen.

Bezüglich der Knicklänge wird dies durch einen Faktor β („Knicklängenbeiwert“) ausgedrückt, mit dem die vorhandene Länge multipliziert wird, um die Knicklänge zu erhalten. Im obigen Beispiel ist für den linken Stiel:

$$\beta = \text{ca. } 2,0$$

daher

$$s_{,k} = L * \beta = 10 \text{ m} * 2,0 = 20 \text{ m}$$

Für den rechten Stiel gilt:

$$\beta = \text{ca. } 3,0$$

daher

$$s_{,k} = L * \beta = 5 \text{ m} * 3,0 = 15 \text{ m}$$

Bei praktischen Berechnungen ist das „Raten“ von Knicklängenbeiwerten problematisch, da man beim „Raten“ eine entscheidende Information in das System hineinsteckt, die man eigentlich nicht hat. Fehleinschätzungen gehen ca. quadratisch in das Ergebnis der Knicklastberechnung ein!

3.6 Konstruktive Empfehlungen

- Randbedingungen beachten
Ist das System wirklich so, wie ich gerechnet habe, liegen meine Modellannahmen auf der sicheren Seite?
- Ist das System wirklich unverschieblich?
- Sind die Aussteifungen steif genug?

3.7 Begleitende Regelungen

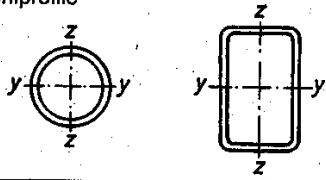
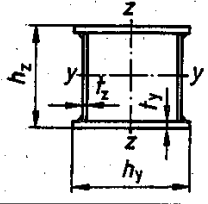
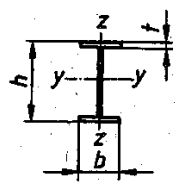
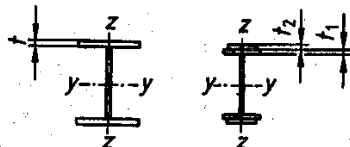
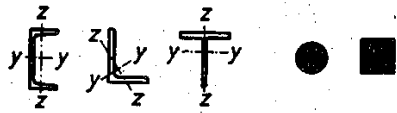
3.7.1 Knicknachweis nach EC3

– wird noch ergänzt –

3.7.2 Knicknachweis nach DIN 18800-2

Die Zuordnung zu den Knickspannungslinien erfolgt durch die Beschreibung des Querschnittes in einer Tabelle.

Tabelle 5: Zuordnung der Querschnitte zu den Knickspannungslinien

	1	2	3
	Querschnitt	Ausweichen rechtwinklig zur Achse	Knickspannungslinie
1	Hohlprofile 	warm gefertigt y-y z-z	a
		kalt gefertigt y-y z-z	b
2	geschweißte Kastenquerschnitte 	y-y z-z	b
		dicke Schweißnaht und $h_y/t_y < 30$ $h_z/t_z < 30$ y-y z-z	c
3	gewalzte I-Profile 	$h/b > 1,2; t \leq 40 \text{ mm}$ y-y z-z	a b
		$h/b > 1,2; 40 < t \leq 80 \text{ mm}$ y-y z-z	b c
		$h/b \leq 1,2; t \leq 80 \text{ mm}$ y-y z-z	c
		$t > 80 \text{ mm}$ y-y z-z	d
4	geschweißte I-Querschnitte 	$t_1 \leq 40 \text{ mm}$ y-y z-z	b c
		$t_1 > 40 \text{ mm}$ y-y z-z	c d
5	U-, L-, T- und Vollquerschnitte  und mehrteilige Stäbe nach Abschnitt 4.4	y-y z-z	c
6	Hier nicht aufgeführte Profile sind sinngemäß einzuordnen. Die Einordnung soll dabei nach den möglichen Eigenspannungen und Blechdicken erfolgen.		

Anmerkung: Als dicke Schweißnähte sind solche mit einer vorhandenen Nahtdicke $a \geq \min t$ zu verstehen.

aus DIN 18800-2

Tabelle 4. **Parameter α zur Berechnung des Abminderungsfaktors κ**

Knickspannungslinie	a	b	c	d
α	0,21	0,34	0,49	0,76

aus DIN 18800-2

Die Auswirkung der Momentenverteilung wird durch einen Momentenbeiwert beschrieben, der ebenfalls aus einer Tabelle entnommen wird.

Tabelle 11. **Momentenbeiwerte**

	1	2	3
	Momentenverlauf	Momentenbeiwerte β_m für Biegeknicken	Momentenbeiwerte β_M für Biegedrillknicken
1	<p>Stabendmomente</p> <p>M_1 $\psi \cdot M_1$ $-1 \leq \psi \leq 1$</p>	<p>$\beta_{m,\psi} = 0,66 + 0,44 \psi$ jedoch $\beta_{m,\psi} \geq 1 - \frac{1}{\eta_{KI}}$ und $\beta_{m,\psi} \geq 0,44$</p>	<p>$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7 \psi$</p>
2	<p>Momente aus Querlast</p> <p>M_Q M_Q</p>	<p>$\beta_{m,Q} = 1,0$</p>	<p>$\beta_{M,Q} = 1,3$ $\beta_{M,Q} = 1,4$</p>
3	<p>Momente aus Querlasten mit Stabendmomenten</p> <p>M_1 M_Q ΔM M_1 M_Q ΔM M_1 M_Q ΔM</p>	<p>$\psi \leq 0,77$: $\beta_m = 1,0$ $\psi > 0,77$: $\beta_m = \frac{M_Q + M_1 \cdot \beta_{m,\psi}}{M_Q + M_1}$</p>	<p>$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$</p> <p>$M_Q = \max M$ nur aus Querlast</p> <p>$\Delta M = \begin{cases} \max M & \text{bei nicht durchschlagendem Momentenverlauf} \\ \max M + \min M & \text{bei durchschlagendem Momentenverlauf} \end{cases}$</p>

aus DIN 18800-2

Der Rechengang ist in den Rechenbausteinen BK_N für zentrische Normalkraft und BK_N-M für Normalkraft und M_y dargestellt.

4. Beispiel

4.1 Knödels Federstahl

Querschnitt 19x1

Länge 700 mm

Trägheitsmoment um die schwache Achse

$$I_{z,z} = 19 \text{ mm} \cdot 1^3 \text{ mm}^3 / 12 = 1,58 \text{ mm}^4$$

Eulersche Knicklast

$$P_{ki} = E \cdot I \cdot \pi^2 / L^2$$

$$P_{ki} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,58 \text{ mm}^4 \cdot \pi^2 / (700 \text{ mm})^2 = 6,65 \text{ N (entspr. 670 Gramm)}$$

Bewertung:

Offensichtlich knickt der Federstahlstreifen um die schwache Achse rein elastisch, da er keine bleibenden Verformungen aufweist. Die Eulerlast reicht daher aus, um das Knickverhalten ausreichend zu beschreiben. In diesem Fall entfällt die Ermittlung der bezogenen Schlankheit usw.

$$N_{R,d,knick} = P_{ki} / \gamma_M = 6,65 \text{ N} / 1,1 = 6,05 \text{ N (entspr. 600 Gramm)}$$

4.2 Stütze unter zentrischer Normalkraft

siehe Rechenbaustein BK_N_HEA120_<datum>

HEA 120 – S235

Knicken um die schwache Achse

$$s_k = 2,50 \text{ m}$$

$$\lambda_{quer} = 0,890$$

KSL c

$$\kappa = 0,606$$

$$N_{R,d,k} = 334 \text{ kN}$$

$$s_k = 7,50 \text{ m}$$

$$\lambda_{quer} = 2,67$$

KSL c

$$\kappa = 0,118$$

$$N, R, d, \kappa = 64,9 \text{ kN}$$

Bewertung:

Auch bei einer Knicklänge von 7,50 m knickt die Stütze nicht rein elastisch. Die Eulerlast beträgt

$$P_{ki} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 231 \text{ cm}^4 \cdot \pi^2 / (7,50 \text{ m})^2 = 85,1 \text{ kN}$$

Die Knickspannungslinie c liegt um mehr als γ_M unter diesem Wert.

5. Ausblick

– wird noch ergänzt –

6. Quellen

- [1] EN 1993 Eurocode 3 (EC3): Design of steel structures
EN 1993-1-1: General rules and rules for buildings. May 2005.
- [2] DIN 18800: Stahlbauten.
Teil 2: Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken. November 1990.
- [3] Krüger, U.: Stahlbau. Teil 1 Grundlagen. 3. Aufl. Ernst & Sohn, Berlin 2002.
- [4] Petersen, Chr.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, 2. Auflage. Vieweg, Braunschweig 1982.

7. Anhang A: Herleitung der Eulerlast

Die folgende Darstellung ist angelehnt an Krüger (2002).

Am verformten Stab (siehe folgende Skizze) ergibt sich aus einer Gleichgewichtsbetrachtung das Biegemoment im ausgelenkten Stababschnitt;

$$M(x) = N \cdot w(x)$$

Das Biegemoment M wird durch die linearisierte DGL des Biegebalkens ausgedrückt (siehe Skript Knödel Elastizitätslehre – Biegebalken):

$$w''(x) = -M(x) / EI \quad \text{oder} \quad M(x) = -EI \cdot w''(x)$$

Diesen Wert in die obige Gleichgewichtsbeziehung eingesetzt

$$-EI \cdot w''(x) = N \cdot w(x) \quad \text{und umgeformt}$$

$$w''(x) + w(x) \cdot N / EI = 0$$

Mit der Abkürzung

$$k^2 = N / EI$$

erhält man die charakteristische Gleichung

$$w''(x) + k^2 \cdot w = 0$$

Aufgrund der Kenntnis der Biegefigur wird als Ansatzfunktion gewählt:

$$w(x) = A \cdot \sin(k \cdot x)$$

$$w'(x) = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot x)$$

$$w''(x) = -A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot x)$$

Zur Kontrolle wird in die charakteristische Gleichung eingesetzt

$$-A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot x) + k^2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Einsetzen der Randbedingungen

$$w(0) = A \cdot \sin(k \cdot 0)$$

liefert keine neue Erkenntnis

$$w(L) = A \cdot \sin(k \cdot L)$$

liefert entweder $A = 0$ (triviale Lösung), oder

$$0 = \sin(k \cdot L)$$

Die Lösungen hierfür lauten

$$k \cdot L = n \cdot \pi$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$

Nach Quadrieren

$$k^2 \cdot L^2 = n^2 \cdot \pi^2$$

und Wiedereinsetzen der obigen Abkürzung erhält man

$$L^2 \cdot N / EI = n^2 \cdot \pi^2 \quad \text{und nach Umformen}$$
$$N = EI \cdot (n \cdot \pi / L)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

Der Wert $n = 1$ beschreibt dabei eine Knickfigur mit einer Sinushalbwelle, der Wert $n = 2$ eine Knickfigur mit zwei Sinushalbwellen usw., die zugehörigen Knicklasten steigen mit dem Quadrat der Halbwellenzahlen. Von baustatischer Bedeutung ist wegen des Minimums der inneren Arbeit nur die zur niedrigsten Knicklast gehörende einwellige Eigenform. In der Baudynamik sind u.U. auch die höheren Eigenformen von Bedeutung.

Bemerkenswert ist, dass das obige Einsetzen der Randbedingungen keine Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstante A liefert, die als Amplitude der Knickfigur gedeutet werden kann. Dies wird im allgemeinen so interpretiert, dass nach Auslösen des Knickvorganges beliebig große Auslenkungen stattfinden. Allerdings gilt diese Aussage nur für die Verwendung der linearisierten Balken-DGL, d.h. für die Voraussetzung kleiner Verformungen bzw. kleiner Neigungen der Biegelinie (siehe Skript Knödel Elastizitätslehre – Biegebalken).