# Elastizitätslehre

# Verformung von Körpern

## 0. Inhalt



## 1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Verformungen von Bauteilen

Einordnung

Baustatik – Grundlagen – Elastizitätslehre – Verformungen

Lernziele

Verformungen von elastischen Körpern unter mechanischer Belastung ermitteln können

Einschränkungen, Abgrenzung

Es werden nur reversible Verformungen betrachtet, bleibende/plastische

Verformungen werden nicht berücksichtigt;

Stabilitätsphänomene sind ausgeschlossen;

## 2. Begriffe

Beanspruchung

Kräfte (forces), Spannungen (stresses) und Dehnungen (strains), die im Inneren eines Festkörpers durch die (äußere) Belastung entstehen

siehe Belastung

Belastung — die von außen auf einen Körper einwirkenden Kräfte (eingeprägte Kräfte)

siehe Beanspruchung

E-Modul — Elastizitätskonstante eines Werkstoffes, Young's modulus

Mehrzahl: die E-Moduln

Elastizität — Ein elastischer Körper reagiert auf eine mechanische Belastung (Krafteinwirkung) mit einer Verformung; nach Entfernen der mechanischen Belastung nimmt er seine ursprüngliche Form wieder ein – die Verformung ist reversibel (umkehrbar)

Hooke — Sir Robert Hooke (1635–1703) englischer Mathematiker und Physiker entdeckte den proportionalen Zusammenhang zwischen Beanspruchung und Verformung bei Festkörpern

Querdehnung, Querdehnzahl

$\nu$ (ny), manchmal auch als $\mu$ (my) bezeichnet, Poisson's ratio

Verformung — Oberbegriff für die Deformation/Formänderung eines Körpers in allen Raumrichtungen

## 3. Grundlagen

Physik — Hookesches Gesetz

Baustatik I — Gleichgewichtszustand eines (Starr-)Körpers

Festigkeitslehre

Spannungsverteilung in einem biegebeanspruchten Querschnitt

# 4. Elastische Verformungen

## 4.1 Allgemeines

Im Folgenden wird nur der Sonderfall der linear-elastischen Verformungen betrachtet. Diese werden durch das Hookesche Gesetz beschrieben. Demnach ist die Zunahme der Verformungen in einem Festkörper proportional zur Zunahme der äußeren Last.

Die graphische Darstellung dieses Zusammenhanges nennt man Federdiagramm. Auf der X-Achse werden die Verformungen aufgetragen, auf der Y-Achse die Beanspruchung. Die Reaktion des Körpers bzw. der Feder zeigt sich als Ursprungsgerade.

Die mathematisch/physikalische Formulierung heißt

$$F = c * w \qquad [N] = [N/m] * [m]$$

c ist eine Federkonstante.

## 4.2 Achsiale Verformungen und E-Modul

Ein prismatischer Körper, dessen Kanten parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen X, Y, Z orientiert sind, kann Längenänderungen ΔX, ΔY, ΔZ erfahren.

Hinweis:

wenn der Körper translatorische Verschiebungen ΔX, ΔY, ΔZ ausführt, entstehen dadurch im Inneren des Körpers keine Beanspruchungen (Starrkörperverschiebung, Thema von Baustatik I)

Als relatives Maß für die Längenänderung führt man die Dehnung $\epsilon$ epsilon ein:

$$\epsilon = \Delta L / L_0$$

mit der man die Längenänderung $\Delta L$ auf die (unbelastete) Ausgangslänge $L_0$ bezieht.

Das oben formulierte Hookesche Gesetz lautet für prismatische Körper mit der Querschnittsfläche A

$$F=\frac{E*A}{L_0}*\Delta L \qquad [N]=\frac{[N/m^2]*[m^2]}{[m]}*[m]$$

Den Term $\frac{E*A}{L_0}$ nennt man die Dehnsteifigkeit des Stabes.

Anders umgeformt erhält man

$$F=E*A*\frac{\Delta L}{L_0}=E*A*\epsilon$$

und weiter

$$\frac{F}{A}=E*\epsilon \quad .$$

Mit

$$F/A=\sigma$$

wird hieraus

$$\sigma=E*\varepsilon$$

oder

$$E=\sigma/\varepsilon$$

oder

$$\varepsilon=\sigma/E \quad .$$

E [N/m²] ist „der E-Modul", eine Werkstoffkonstante mit der Einheit (mechanische) Spannung. Bildhaft ausgedrückt sagt der E-Modul:

> Mit welcher Spannung muss ich einen Körper beanspruchen,
> um eine Dehnung von 1 zu erzeugen.
> Eine Dehnung von 1 bedeutet eine Verdoppelung der ursprünglichen Länge des Körpers.

E-Moduln verschiedener Werkstoffe (gerundet):

(1 MN/m² = 1 N/mm²)

| | |
|---|---|
| 200.000 MN/m² | Stahl |
| 100.000 MN/m² | Zink |
| 70.000 MN/m² | Aluminium |
| 30.000 MN/m² | Beton C20/25 |
| 10.000 MN/m² | Holz parallel zur Faser |

1.000 MN/m² Holz quer zur Faser

5–10 MN/m² Gummi / Elastomer / Kautschuk

## 4.3 Querdehnung $\nu$

Hypothese von der Volumenkonstanz

Ein quadratisches Prisma, welches sich unter Last in der Richtung einer Achse verlängert, muss sich in der Richtung der anderen beiden Achsen verkürzen, wenn man annimmt, dass das Volumen während des Verformungsvorganges unverändert bleibt.

Für ein Prisma mit den Ausgangsabmessungen a / a / L beträgt das Ausgangsvolumen:

$$V_{alt} = a * a * L = a^2 * L$$

Für das neue Volumen nehmen wir an, dass die Seiten a um $\Delta a$ länger werden und die Seite L um $\Delta L$ . Dann beträgt das neue Volumen

$$V_{neu} = (a + \Delta a)^2 * (L + \Delta L) = a^2 * (1 + \epsilon_a)^2 * L * (1 + \epsilon_L)$$

Wir bilden das Verhältnis aus dem neuen und dem alten Volumen :

$$\frac{V_{neu}}{V_{alt}} = \frac{a^2 * (1 + \epsilon_a)^2 * L * (1 + \epsilon_L)}{a^2 * L}$$ (kürzen und umformen)

$$\frac{V_{alt} + \Delta V}{V_{alt}} = (1 + \epsilon_a)^2 * (1 + \epsilon_L)$$ (kürzen)

$$1 + \epsilon_V = (1 + 2 * \epsilon_a + \epsilon_a^2) * (1 + \epsilon_L)$$ (ausmultiplizieren)

$$1 + \epsilon_V = 1 + \epsilon_L + 2 * \epsilon_a + 2 * \epsilon_a * \epsilon_L + \epsilon_a^2 + \epsilon_a^2 * \epsilon_L$$

Potenzen von $\epsilon$ vernachlässigen, da diese “klein von höherer Ordnung” sind:

$$\epsilon_V = \epsilon_L + 2 * \epsilon_a$$

Wenn Volumenkonstanz gelten soll (siehe obige Hypothese), dann soll sich $V_{neu}$ gegenüber $V_{alt}$ nicht verändert haben; es muss daher gelten:

$$\epsilon_V = 0 \; .$$

Damit wird

$$0 = \epsilon_L + 2 * \epsilon_a$$

und durch Umformen erhält man

$$\epsilon_a = -\frac{\epsilon_L}{2}$$

Die Poissonsche Zahl (Querdehnzahl) ist definiert als

$$\nu = -\frac{\epsilon_a}{\epsilon_L}$$

oder

$$\epsilon_a = -\nu * \epsilon_L \quad .$$

Dieser Wert in die Gleichung für $\epsilon_V$ eingesetzt ergibt

$$\epsilon_V = \epsilon_L + 2 * (-\nu * \epsilon_L)$$

$$\epsilon_V = (1 - 2 * \nu) * \epsilon_L$$

Die Veränderung des Volumens hängt also über die Querdehnzahl von der Veränderung der Länge des Prismas ab. Volumenkonstanz tritt nur auf bei $\nu = 0{,}5$ , wie bereits oben gezeigt.

Viele technische Metalle haben eine Querdehnzahl von ca. 0,3, d.h.

$$\epsilon_V = (1 - 2 * 0{,}3) * \epsilon_L = 0{,}4 * \epsilon_L \quad ,$$

das Volumen vergrößert sich also, wenn man den Körper einachsig verlängert.
Die Querdehnzahl von Beton beträgt 0,2.

## 5. Temperaturdehnung

Festkörper dehnen sich bei Temperaturzunahme aus. Sofern diese Dehnung von außen nicht behindert wird, ist sie spannungsfrei.

Die Temperaturdehnung beträgt

$$\epsilon_T = \alpha_T * \Delta T \qquad [1] = [\frac{1}{K}] * [K] \quad ,$$

d.h. die Dehnung ist proportional zur Zunahme der Temperatur. Der (Wärme-) Ausdehnungskoeffizient $\alpha_T$ ist eine „Werkstoffkonstante“, wobei „Konstante“ nur eine technische Näherung ist, da dieser Zahlenwert leicht temperaturabhängig ist.

Ausdehnungskoeffizienten verschiedener Werkstoffe (gerundet):

$1{,}2 * 10^{-5}$ /K ferritischer Stahl

$1{,}6 * 10^{-5}$ /K austenitischer Stahl (nichtrostende Stähle)

$2{,}3 * 10^{-5}$ /K Aluminium

$1{,}0 * 10^{-5}$ /K Beton

$0{,}8 * 10^{-5}$ /K Holz

# 6. Beispiele

## 6.1 Eingespannter Stab mit Temperaturänderung

Ein Stahlstab mit dem Querschnitt 50x10 ist zwischen zwei Schraubstöcken so eingespannt, dass die freie Länge 1000 mm beträgt. Der Stab erfährt dann eine Temperaturerhöhung von 50°K.

1. Schritt: freier Stab unter Temperaturänderung

$$\epsilon_T = \alpha_T * \Delta T$$

$$\epsilon_T = 1{,}2 * 10^{-5} * \frac{1}{K} * 50\,°K = 0{,}00060 = 6{,}00 * 10^{-4} = 0{,}6\,‰$$

$$\Delta L = 0{,}00060 * 1000\,mm = 0{,}6\,mm$$

2. Schritt: Dehnung rückgängig machen

$$\sigma = E * \epsilon$$

$$\sigma = 200.000 \frac{N}{mm^2} * (-0{,}00060) = -120 \frac{N}{mm^2}$$

Die entstehende Druckkraft im Stab ist

$$F = -120 \frac{N}{mm^2} * 50\,mm * 10\,mm = -60\,kN = -6\,Tonnen$$

# 7. Literatur

[1] Knödel, P.: Lehrunterlagen Stahlbau an der Fachhochschule Augsburg, herunterladbar über http://www.peterknoedel.de/lehre/lehre.htm, laufend aktualisiert.