

## Elastizitätslehre

### Innere Arbeit

#### 0. Inhalt

<u>0.</u>	<u>Inhalt</u>	<u>1</u>
<u>1.</u>	<u>Allgemeines</u>	<u>1</u>
<u>2.</u>	<u>Begriffe</u>	<u>2</u>
<u>3.</u>	<u>Grundlagen</u>	<u>2</u>
<u>4.</u>	<u>Innere Arbeit – IN BEARBEITUNG</u>	<u>2</u>
4.1	Allgemeines	2
4.2	Stab unter Normalkraft	3
4.3	Balken unter Biegemoment	3
<u>5.</u>	<u>Beispiele</u>	<u>4</u>
5.1	Bock mit vertikaler Einzellast	4
5.1.1	System, Lasten, Schnittgrößen	4
5.1.2	Lösung mit elementaren Methoden	4
5.1.3	Lösung mit dem Arbeitssatz	6
<u>6.</u>	<u>Literatur</u>	<u>7</u>

#### 1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Innere Arbeit an elastischen Körpern

Einordnung

Baustatik – Grundlagen – Elastizitätslehre – Innere Arbeit

Lernziele

Innere Arbeit von Stäben unter mechanischer Belastung ermitteln können

Einschränkungen, Abgrenzung

Es werden nur elastische Zustände betrachtet;

Stabilitätsphänomene sind ausgeschlossen;

## 2. Begriffe

EA, E\*A Dehnsteifigkeit eines Stabquerschnittes

EI, E\*I Biegesteifigkeit eines Balkenquerschnittes

Schreibweise

Indizes werden vereinfachend durch Komma abgetrennt, z.B.

$\gamma, M_2 = \gamma_{M_2}$  lies: gamma Index M2

## 3. Grundlagen

Physik Hookesches Gesetz

Baustatik I Gleichgewichtszustand eines Körpers

Festigkeitslehre

Spannungsverteilung in einem biegebeanspruchten Querschnitt

Baustatik II Biegelinie eines Balkens unter Momentenbeanspruchung

## 4. Innere Arbeit – IN BEARBEITUNG

### 4.1 Allgemeines

Beim Dehnen einer Wegfeder wird in dieser „innere Arbeit“ gespeichert, man spricht auch von elastischem Potential.

Vom unbelasteten Zustand der Feder bis zum belasteten ändert sich die aufgebrachte Längskraft von Null auf  $F_{\max}$ . Aufgrund des Hookeschen Gesetzes besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Kraft  $F(x)$  und Federweg  $x$ .

Es gilt

$$F(x) = c * x$$

Die innere Arbeit, die in der Feder gespeichert ist, beträgt

$$\Pi = \int [F(x)] dx = \int [c * x] dx = 1/2 * c * x^2$$

Wird die Feder von Null bis zum Weg  $s$  gezogen beträgt die innere Arbeit

$$\Pi = 1/2 * c * s^2 - 1/2 * c * 0^2 = 1/2 * c * s^2$$

oder, unter Bezug auf die Längskraft  $F(s) = F_{\max}$

$$\Pi = 1/2 * F_{\max} * s$$

Dieser Term lässt sich deuten als Fläche unter der Arbeitslinie der Kraft  $F(x)$  über dem Weg  $s$ .

## 4.2 Stab unter Normalkraft

Ein Stab unter Normalkraft wird als Dehnfeder betrachtet, die innere Arbeit lautet daher analog (Dehnsteifigkeit des Stabes siehe Skript „Elastische Körper“)

$$\Pi = 1/2 * F_{\max} * \Delta L = 1/2 * F_{\max} * \varepsilon * L = 1/2 * F_{\max} * \sigma/E * L$$

$$\Pi = 1/2 * F_{\max} * (F_{\max}/A) / E * L = 1/2 * F_{\max}^2 * L / (EA)$$

mit der Dehnsteifigkeit des Stabes  $EA/L$

Auf anderem Weg erhält man

$$\Pi = 1/2 * \int [\sigma * \varepsilon] dV = 1/2 * \int [\sigma * \varepsilon * A] dL$$

Da  $\sigma$  und  $\varepsilon$  entlang der Stablänge nicht variabel sind, erhält man hieraus integriert von Null bis  $L$ :

$$\Pi = 1/2 * \sigma * \varepsilon * A * L = 1/2 * \sigma * \sigma/E * L = 1/2 * F_{\max}^2 * A * L / (A^2 * E)$$

$$\Pi = 1/2 * F_{\max}^2 * L / (EA)$$

## 4.3 Balken unter Biegemoment

Wie oben für den Stab unter Normalkraft gezeigt, erhält man als Volumenintegral über Spannung mal Dehnung:

$$\Pi = 1/2 * \int [\sigma * \varepsilon] dV = \Pi = 1/2 * \int [\sigma * \sigma/E] dV$$

Mit

$$\sigma = M * z / I$$

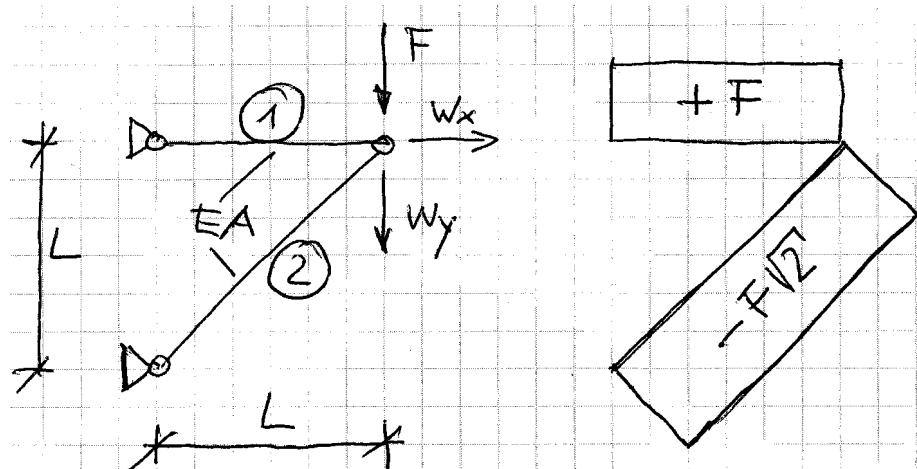
erhält man

$$\Pi = 1/2 * \int [M^2 * z^2 / (E * I^2)] dz dL$$

## 5. Beispiele

### 5.1 Bock mit vertikaler Einzellast

#### 5.1.1 System, Lasten, Schnittgrößen



Skizze: System, Lasten, Stabkräfte

Stabkräfte:

$$1: \quad N_1 = +F$$

$$2: \quad N_2 = -F * \sqrt{2}$$

Stablängen:

$$1: \quad L_1 = L$$

$$2: \quad L_2 = L * \sqrt{2}$$

Gesucht:

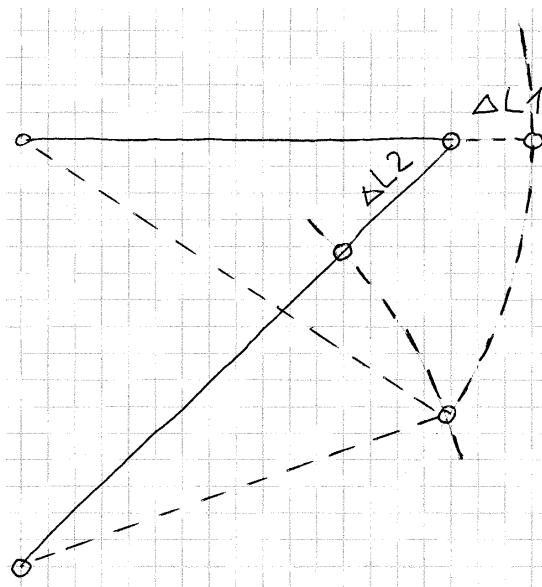
Horizontale und vertikale Verschiebung des Lastangriffspunktes

#### 5.1.2 Lösung mit elementaren Methoden

Längenänderungen der einzelnen Stäbe:

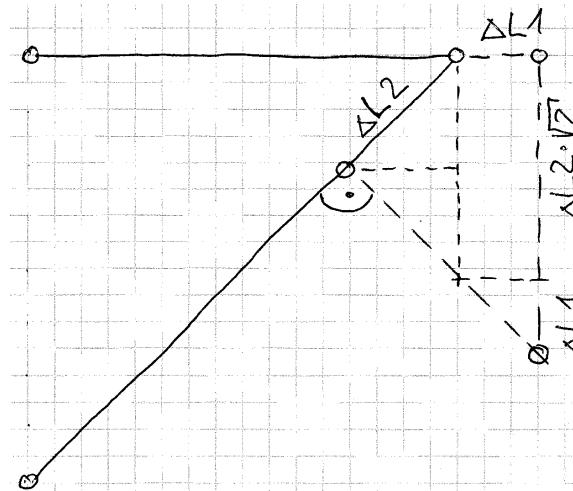
$$1: \quad \Delta L_1 = +F * L / (E * A)$$

$$2: \quad \Delta L_2 = -F * \sqrt{2} * L * \sqrt{2} / (E * A) = -2 * F * L / (E * A)$$



Verschiebung des Lastangriffspunktes  
aufgrund der Längenänderungen der Stäbe

Wie aus der obigen Skizze ersichtlich ist, können die Verschiebungen des Lastangriffspunktes mit elementaren Mitteln nur schwer ermittelt werden. Für Längenänderungen, die im Verhältnis zu den Stablängen sehr klein sind, können jedoch die Kreisbögen im Bereich des Knotens durch gerade Linien ersetzt werden. Damit erhält man folgende Situation:



Verschiebung des Lastangriffspunktes  
bei (sehr) kleinen Längenänderungen der Stäbe

Ergebnis:

$$w,x = \Delta L_1 = F^*L / (E^*A)$$

$$w,y = \Delta L_1 + \Delta L_2 * \sqrt{2} = F^*L / (E^*A) * [1 + 2*\sqrt{2}]$$

Zahlenbeispiel:

$L = 1 \text{ m}$ ; Querschnitt: 2 L 60x6, Stahl,  $F = 10 \text{ kN}$

$$w,x = 10 \text{ kN} * 1000 \text{ mm} / (2,1*10^5 \text{ N/mm}^2 * 2 * 691 \text{ mm}^2) = 0,034 \text{ mm}$$

$$w,y = 0,034 \text{ mm} * [1 + 2*\sqrt{2}] = 0,132 \text{ mm}$$

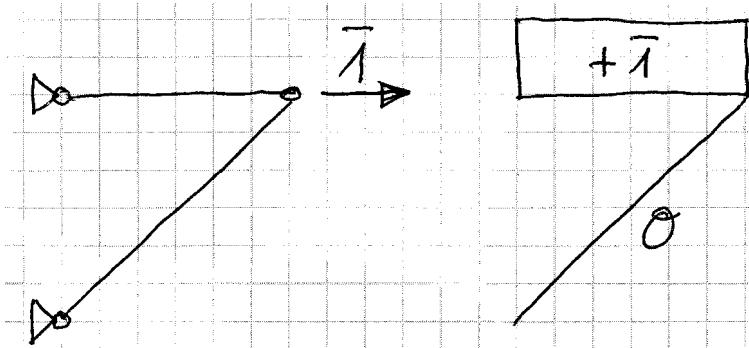
Kontrolle der Spannungen im Druckstab:

$$\sigma = 10 \text{ kN} / (2 * 691 \text{ mm}^2) = 7,2 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Knicken wird nicht maßgebend})$$

### 5.1.3 Lösung mit dem Arbeitssatz

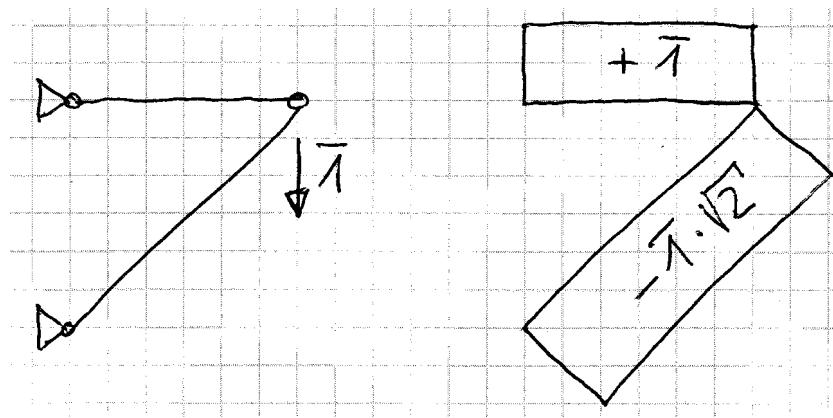
$$w_k = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \bar{S}_i}{EA_i} s_i + \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \alpha_T T_i s_i$$

(aus Schneider Bautabellen)



Anbringen einer virtuellen Kraft in Richtung  $w,x$

$$w,x = (+F) * (+1) * 1 * L / (E^*A) + 0 = F^*L / (E^*A) \quad \text{q.e.d.}$$



Anbringen einer virtuellen Kraft in Richtung w,y

$$w,y = (+F) * (+1) * 1 * L / (E * A) + (-F * \sqrt{2}) * (-1 * \sqrt{2}) * 1 * L * \sqrt{2} / (E * A)$$

$$w,y = F * L / (E * A) * [1 + 2 * \sqrt{2}] \quad \text{q.e.d.}$$

## 6. Literatur

- [1] Hirschfeld, K.: Baustatik. Theorie und Beispiele. Vierte, unveränderte Auflage, Erster und Zweiter Teil. Springer, Berlin 1998.
- [2] Knödel, P.: Lehrunterlagen Stahlbau an der Fachhochschule Augsburg, herunterladbar über <http://www.peterknoedel.de/lehre/lehre.htm>, laufend aktualisiert.
- [3] Petersen, Chr.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, 2. Auflage. Vieweg, Braunschweig 1982.
- [4] Schneider, K.-J. (Hrsg.): Bautabellen für Ingenieure, 16. Aufl., Werner Verlag, Düsseldorf 2004.
- [5] Winkler, J., Aurich, H.: Taschenbuch der Technischen Mechanik. 7. Auflage, Carl Hanser Verlag, München 2000.